

IMPLEMENTASI MODIFIKASI ALGORITMA *BOX-COUNTING DIMENSION* PADA PERHITUNGAN DIMENSI FRAKTAL GARIS PANTAI AUSTRALIA DENGAN PYTHON

Michael Lim, Herlina Napitupulu, Alit Kartiwa

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran

Email : michael18001@mail.unpad.ac.id, herlina@unpad.ac.id, alit.kartiwa@unpad.ac.id

Abstrak

Perhitungan dimensi fraktal sudah banyak diterapkan pada berbagai bidang ilmu pengetahuan. Salah satu metode perhitungan dimensi fraktal, yakni metode *box-counting dimension*, teruji lebih ideal di zaman modern yang identik dengan ilmu komputasi. Meski demikian, terdapat perbedaan algoritma antarpeneliti yang mencakup pendefinisian dimensi ataupun persyaratan pemilihan dan pengolahan objek. Oleh karenanya, penelitian ini bertujuan memodifikasi algoritma *box-counting dimension* yang diaplikasikan dengan bahasa pemrograman Python pada objek garis pantai Australia. Hasil perhitungan dengan algoritma ini kemudian dibandingkan dengan penelitian sebelumnya dengan metode yang serupa, namun melalui algoritma yang berbeda. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, didapatkan bahwa dimensi fraktal Australia menggunakan modifikasi algoritma *box-counting dimension* adalah 1.087 dengan selisih perhitungan sebesar 4.9% terhadap metode segmentasi dan selisih perhitungan sebesar 3.85% terhadap metode *box-counting dimension* pada penelitian terdahulu.

Kata Kunci : Fraktal, *box-counting dimension*, Australia, Modifikasi Algoritma

Abstract

Fractal dimension calculations have been widely applied in various fields of science. One of the fractal dimension calculation methods, namely the box-counting dimension method, has been proven to be more ideal in modern era which is closely related with computational science. However, there are differences in algorithms between researchers which include defining dimensions or requirements for selecting and processing objects. Therefore, this study aims to modify the box-counting dimension algorithm which is applied to the Python programming language on Australian coastline objects. The results of calculations with this algorithm are then compared with previous studies with a similar method, but through a different algorithm. Based on the research that has been done, it was found that the Australian fractal dimension using a modified box-counting dimension algorithm is 1,087 with a calculation difference of 4.9% for the segmentation method and a calculation difference of 3.85% for the box-counting dimension method in previous studies.

Keywords: Fractal, *box-counting dimension*, Australia, algorithm modification

1. PENDAHULUAN

Geometri fraktal telah diaplikasikan dalam berbagai bidang pengetahuan sejak awal diperkenalkan pada tahun 1920. Bagian dari ilmu geometri fraktal yang masih sangat menarik untuk diteliti ialah dimensi fraktal. Kajian mengenai perhitungan nilai tersebut misalnya

dilakukan untuk menguji tingkat kemanisan buah (Sampurno, et al., 2018), panjang batas garis pantai (Richardson, 1961), dan mendeteksi perkembangan kanker (Bhoi, et al., 2015). Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk mengestimasi dimensi fraktal, tetapi yang teruji lebih baik adalah *box-counting*

dimension (Ristanovic, et al., 2013). Metode ini memiliki definisi matematis yang serupa dengan metode segmentasi Richardson (Barnsley, 1993) dan telah diaplikasikan ke dalam dunia komputasi, tetapi sering kali ditemukan perbedaan algoritma *box-counting dimension* antarpeneliti, baik dari segi pendefinisian dimensi ataupun persyaratan pemilihan dan pengolahan objek. Penulis berpendapat bahwa algoritma *box-counting dimension* memerlukan deteksi tepi Canny yang teruji lebih baik dibandingkan metode deteksi tepi lainnya dikarenakan menghasilkan tepi yang lebih detail dan tajam (Joshi & Vyas, 2018).

Penelitian ini bertujuan untuk memodifikasi algoritma *box-counting* untuk objek citra digital garis pantai Australia yang diaplikasikan pada bahasa pemrograman Python. Garis pantai Australia telah menjadi objek kajian estimasi dimensi fraktal pada beberapa penelitian sebelumnya dengan metode yang sama dan algoritma yang berbeda sehingga hasil yang diperoleh dari modifikasi algoritma dapat dibandingkan dengan hasil yang telah ada sebelumnya.

2. KAJIAN PUSTAKA

2.1. Dimensi Fraktal

Adalah suatu nilai pembanding dari kompleksnya bentuk/pola fraktal menyusun suatu objek melalui pengukuran pada skala tertentu (Barnsley, 1993).

2.2. Formulasi Dimensi Fraktal

$$D = \frac{\ln N(A, \epsilon)}{\ln \left(\frac{1}{\epsilon}\right)}$$

D adalah dimensi fraktal dari objek A dengan ϵ adalah skala pada pengukuran ke- n (Barnsley, 1993)

2.3. Box-Counting Dimension

Misalkan $A \in \mathcal{H}(X)$ di dalam ruang metrik. Akan ditutup \mathbb{R}^m dengan kotak-kotak berukuran $(\frac{1}{2^n})$. Ambil $N_n(A)$ sebagai banyaknya bola penutup dengan ukuran demikian yang bersinggungan dengan attractor. Jika:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln(N(A, \epsilon_n))}{\ln(2^n)} \right\}$$

maka dinyatakan A memiliki dimensi fraktal D (Barnsley, 1993).

2.4. Dimensi Pada Beberapa Pengukuran

Misalkan dilakukan pengukuran pada objek A dengan $n \geq 1$ sehingga diperoleh $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ dan N_1, N_2, \dots, N_n . Nilai D pada objek A diperoleh dengan menentukan persamaan garis regresi linear dan memperoleh nilai gradiennya sebagai nilai dimensi objek A .

$$D = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

D adalah dimensi fraktal objek A , x_i adalah $\ln 1/\epsilon$, dan y_i adalah $\log N$ (Wu, et al., 2020).

2.5. Dimensi Fraktal Australia

Berdasarkan penelitian yang dilakukan dengan metode segmentasi yang juga dikenal dengan sebutan *divider dimension*, diperoleh dimensi dari garis pantai Australia sebesar 1.13 (Mandelbrot, 1967). Pengukuran dilakukan pada objek yang tertera di Gambar 1.



Gambar 1. Batas Australia (Husain, et al., 2021)

Dengan metode *box-counting dimension*, diperoleh nilai dimensi dari Gambar 1 sebesar 1.143 (Husain, et al., 2021).

2.6. Algoritma Box-Counting Dimension

Mengacu pada penelitian mengenai estimasi dimensi fraktal dari Australia, berikut adalah algoritma dari *box-counting dimension* (Husain, et al., 2021)

1. Mencari gambar dengan kualitas tinggi dari *Geographic Information System* (GIS)
2. Menghapus objek yang tidak penting melalui *software* pengolah gambar sehingga hanya menghasilkan objek inti
3. Mengolah vektor nilai gambar dan membentuk kotak pengukur
4. Mengaplikasikan metode *box-counting*
5. Menghitung dimensi fraktalnya

Adapun perbedaan algoritma yang ditunjukkan pada penelitian mengenai metode *box-counting dimension* berdasarkan definisi matematis sebagai berikut (Wu, et al., 2020).

1. Mencari gambar objek untuk diteliti
2. Mendefinisikan matriks nilai piksel gambar
3. Mengubah matriks nilai piksel gambar menjadi matriks bernilai biner
4. Menentukan ukuran kotak *box-counting*
5. Membagi matriks bernilai biner menjadi beberapa bagian
6. Menghitung jumlah sub-matriks yang nilai total elemen didalamnya tidak sama dengan 0
7. Memetakan nilainya ke dalam sistem koordinat
8. Menentukan persamaan regresi linear dan memperoleh dimensinya berdasarkan gradien persamaan tersebut

3. METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, metodologi penelitian yang digunakan adalah studi literatur berupa pengumpulan data dan teori matematis serta studi eksperimental berupa pengolahan citra digital melalui pemrograman Python. Adapun detail langkah-langkah penelitian dijelaskan sebagai berikut.

1. Tinjauan literatur mencakup teori matematis dari dimensi fraktal, estimasi dimensi Australia pada penelitian-penelitian terdahulu, dan algoritma *box-counting dimension*.
2. Modifikasi algoritma dilakukan melalui pertimbangan-pertimbangan yang didasarkan kepada tinjauan pustaka dan latar belakang
3. Penyusunan program mencakup penyusunan program deteksi tepi Canny dan program *box-counting dimension*
4. Estimasi dimensi dilakukan dengan mengeksekusi objek melalui program deteksi tepi Canny. Output dari program tersebut dieksekusi kembali dengan program *box-counting dimension*, sehingga hasil dimensi akan otomatis ditampilkan dari program.
5. Perhitungan selisih pengukuran dilakukan dengan membandingkan hasil dari

penelitian ini dengan penelitian oleh Richardson dan oleh Husain, et al. (2021).

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Algoritma Modifikasi *Box-Counting Dimension*

Berdasarkan beberapa hal yang telah disampaikan pada kajian pustaka, berikut adalah beberapa pertimbangan pada proses modifikasi algoritma *box-counting dimension*.

1. Resolusi citra digital yang lebih tinggi akan semakin baik untuk menghasilkan tepi yang lebih tajam saat eksekusi program deteksi tepi.
2. Penggunaan deteksi tepi Canny lebih ideal untuk memfilter *noise* sehingga menghasilkan tepi objek yang lebih tajam dan detail.
3. Penentuan nilai dimensi lebih baik dilakukan sesuai formulasi dari dimensi box counting karena menghasilkan nilai yang lebih logis untuk setiap hasil pengukuran.

Berdasarkan tiga poin pertimbangan di atas dan berdasarkan algoritma yang telah ada sebelumnya, maka berikut adalah algoritma modifikasi *box-counting dimension* yang diusulkan penulis.

1. Input citra digital dengan resolusi yang relatif tinggi
2. Eksekusi deteksi tepi Canny pada citra digital
3. Definisikan resolusi dari citra digital hitam-putih dari hasil (*output*) deteksi tepi Canny
4. Tentukan nilai terendah diantara lebar (*width*) dan tinggi (*height*) pada resolusi citra digital tersebut
5. Definisikan nilai m dengan syarat nilai m ialah nilai n tertinggi yang mungkin dari 2^n dimana harus kurang dari sama dengan resolusi terendah (antara lebar/tinggi)
6. Bentuk kotak pengukur berukuran 2^n dengan $n = 1, 2, 3, \dots, m$
7. Ubah citra digital hitam putih ke dalam bentuk biner
8. Mengaplikasikan kotak pengukur terhadap citra digital
9. Hitung banyaknya jumlah submatriks yang tidak mengandung biner 0 sebagai N

10. Definisikan ukuran box counting menjadi $\epsilon = 2^n/2^{m+1}$
11. Hitung nilai logaritmik dari N dan $1/\epsilon$
12. Menentukan gradien persamaan garis regresi linear

4.2. Program Deteksi Tepi Canny

Program deteksi tepi Canny mencakup 5 tahapan penting sebagai berikut

1. Reduksi noise

Proses ini melibatkan operasi konvolusi yang diaplikasikan dari matriks filter Gaussian terhadap matriks nilai piksel citra digital.

$$\frac{1}{256} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Gambar 2. Filter Gaussian 5×5

Output dari proses ini ialah matriks baru yang berbentuk citra digital dengan minim noise yang disebut sebagai matriks piksel tereduksi.

2. Penentuan gradient tepi

Proses ini merupakan penentuan nilai gradien tepi G dan juga arah tepi (*angle* θ)

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$$

$$\text{angle } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{G_x}{G_y}\right)$$

G_x dan G_y didapat dari hasil konvolusi antara matriks kernel x, y terhadap matriks piksel tereduksi. Karakteristik dari proses ini ialah arah tepi akan tegak lurus terhadap gradien tepi.

3. Non-maximum Suppression

Proses ini merupakan proses pembentukan tepi secara kasar dengan menguji nilai antarpiksel terhadap tetangganya.

4. Ambang batas histeris

Tahapan ini merupakan proses untuk menguji lebih pasti bahwa suatu piksel merupakan tepi atau bukan tepi. Tahapan ini membutuhkan nilai ambang batas atas (*upper threshold*) dan ambang bawah

bawah (*lower threshold*) sebagai acuan untuk mendeteksi tepi.

4.3. Program Box-Counting Dimension

Pada program ini, *package* yang digunakan pada adalah **numpy**, **imageio**, dan **PIL**. Tahapan awal pada program ialah mengimpor ketiga *package* yang digunakan. Kemudian penulis menentukan $threshold = 255$ untuk merubah nilai matriks piksel pada citra digital menjadi matriks biner. Tahapan selanjutnya ialah mendefinisikan fungsi **box_counting** dengan parameter Z yang memuat beberapa fungsi dan *syntax* sebagai berikut.

1. Fungsi boxcount

Pada fungsi boxcount, terdapat *syntax* **np.add.reduceat** yang bertujuan untuk menjumlahkan seluruh elemen pada sub-matriks berukuran 2^n .

2. Merubah matriks piksel menjadi matriks biner

Proses ini memanfaatkan *threshold* yang telah ditentukan diluar fungsi **boxcount**. *Syntax* dari proses ini adalah **Z = (Z == threshold)** yang berarti bahwa untuk setiap nilai elemen matriks yang nilainya 255, maka akan menjadi biner 1, sedangkan yang bukan 255 akan menjadi biner 0.

3. Menentukan nilai dimensi terkecil

Tahapan ini merupakan aplikasi dari algoritma modifikasi *box-counting dimension*. Nilai dimensi terkecil didefinisikan sebagai **p** dan *syntax* untuk mencari dimensi terkecilnya ialah **min(Z.shape)**.

4. Menentukan nilai m

Tahapan ini bermaksud untuk menentukan nilai terbesar dari n yang memungkinkan. *Syntax* dari proses ini dituliskan di dalam fungsi sebagai **int(np.floor(np.log(p)/np.log(2)))**

5. Eksekusi fungsi boxcount dengan fungsi perulangan

Tahapan ini bermaksud menghitung nilai N dengan mengeksekusi fungsi **boxcount**. Terlebih dahulu disusun ukuran kotak *box counting* yang sebut sebagai **sizes**. Kemudian dilakukan fungsi perulangan untuk setiap nilai n melalui *syntax* **for n in sizes** untuk mengeksekusi fungsi **boxcount**.

- Hasil dari fungsi tersebut disimpan dengan **syntax counts.append**.
6. Menampilkan output dari ukuran kotak (*size of box*), ϵ dan jumlah kotak terukur (\mathcal{N})
- Tahapan ini digunakan untuk menampilkan daftar output dari *size of box*, ϵ , dan \mathcal{N} . Output dapat ditampilkan melalui fungsi perulangan dan menjadi hasil dari program *box counting*.
7. Setelah menyusun fungsi **box_counting**, tahapan yang terakhir ialah menginput citra digital hasil deteksi tepi Canny melalui **syntax imageio.imread** dan mengeksekusi fungsi **box_counting** terhadap citra digital yang terinput dengan parameter **I**.

4.4. Dimensi Fraktal Garis Pantai Australia

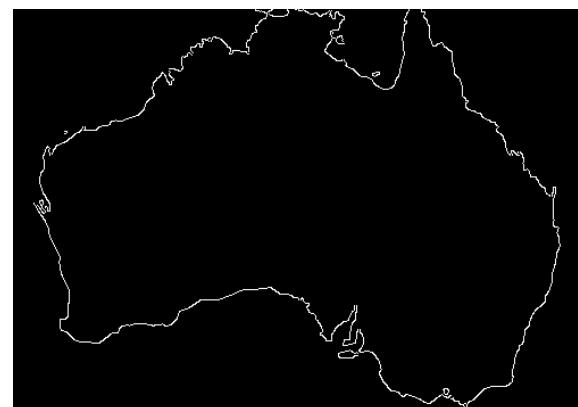
Berdasarkan modifikasi algoritma pada bagian sebelumnya, maka diperlukan citra digital garis pantai Australia yang diperoleh dari *Geographic Information System (GIS)* yang ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Citra Digital Australia

Kemudian sesuai dengan algoritma yang telah disusun, maka tahapan selanjutnya adalah eksekusi program deteksi tepi Canny terhadap Gambar 3, sehingga diperoleh gambar hitam-putih berisikan tepi, gambar dapat diakses pada hipertaut: shorturl.at/ditUW.

Demi kepentingan ilustrasi pada paper ini, maka hasil gambar hitam-putih tersebut ditampilkan dalam resolusi yang lebih kecil (1800 px × 1400 px) seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Tepi Australia yang diperbesar

Berdasarkan hasil pemeriksaan data, diketahui bahwa resolusi citra digital ialah 29470 px × 19261 px. Dari data tersebut, dapat diketahui bahwa resolusi minimum ialah 19262 px sehingga nilai $m = 15$ dengan n terbesar adalah 14. Setelah itu, program *box-counting* dieksekusi pada Gambar 4 sehingga diperoleh data seperti pada Tabel 1.

Tabel 1. Daftar nilai ukuran kotak dan \mathcal{N}

<i>Size of box</i>	<i>Counted box (\mathcal{N})</i>
16384	4
8192	8
4096	19
2048	45
1024	96
512	207
256	439
128	972
64	2058
32	4232
16	8532
8	17108
4	33977
2	67113

Daftar nilai ukuran kotak dikonversi menjadi nilai ϵ yang mana merupakan skala pembanding antara ukuran kotak dengan 2^m , sehingga diperoleh Tabel 2.

Tabel 2. Hasil konversi Tabel 1

$\epsilon = \frac{\text{size of box}}{2^{15}}$	<i>Counted box (N)</i>
$2^{14}/2^{15}$	4
$2^{13}/2^{15}$	8
$2^{12}/2^{15}$	19
$2^{11}/2^{15}$	45
$2^{10}/2^{15}$	96
$2^9/2^{15}$	207
$2^8/2^{15}$	439
$2^7/2^{15}$	972
$2^6/2^{15}$	2058
$2^5/2^{15}$	4232
$2^4/2^{15}$	8532
$2^3/2^{15}$	17108
$2^2/2^{15}$	33977
$2^1/2^{15}$	67113

Dari tabel tersebut, nilai dimensi ditentukan melalui gradien persamaan regresi linear ataupun melalui persamaan D pada beberapa pengukuran, sehingga didapatkan bahwa dimensi dari Australia adalah 1.087

4.5. Diskusi

Berdasarkan informasi yang diperoleh pada kajian pustaka, diketahui bahwa dimensi Australia yang diperoleh Richardson ialah 1.143 yang mana berarti memiliki selisih pengukuran sebesar 4.9%. Hasil ini dapat diterima dikarenakan Richardson menggunakan metode segmentasi yang mana teruji kurang baik berdasarkan penelitian oleh Ristanovic, et al., (2013).

Kemudian ada juga hasil dari Husain, et al. (2021) yang memperoleh bahwa dimensi Australia ialah 1.3 dengan metode *box-counting dimension*. Hal ini menunjukkan selisih perhitungan sebesar 3.85% yang mana memang terjadi akibat perbedaan algoritma antarpenulis. Perbedaan algoritma tersebut menyebabkan adanya perbedaan dari segi pemilihan objek. Terlihat bahwa objek yang dipilih pada penelitian sebelumnya cenderung memiliki garis yang lebih tebal dengan degradasi warna antartitik yang sangat terlihat dan diketahui bahwa tidak adanya metode sejenis deteksi tepi

yang digunakan pada algoritma tersebut sehingga diyakini memiliki potensi *error* yang jauh lebih besar dibandingkan data sebelumnya.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan, maka diperoleh bahwa modifikasi algoritma yang mempertimbangkan persyaratan input kualitas gambar dan input deteksi tepi Canny memberikan hasil output yang lebih detail dan tajam. Selain itu, pengambilan gambar dari GIS juga dapat meminimalisir selisih nilai dimensi yang diakibatkan *noise* pada sumber gambar.

Pada penelitian ini, diperoleh bahwa dimensi fraktal dari Australia adalah 1.087. Hasil ini memiliki selisih perhitungan sebesar 3.85% dengan penelitian Mandlebrot (1967) yang menggunakan metode segmentasi dan selisih perhitungan sebesar 4.9% terhadap penelitian Husain, et al., (2021) yang menggunakan metode *box-counting dimension*. Faktor lain yang dapat mempengaruhi perbedaan hasil perhitungan tersebut adalah asal sumber data/citra yang digunakan dan perbedaan cara pengolahan data.

6. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Universitas Padjadjaran atas dukungannya pada penelitian ini melalui Hibah RPLK dengan nomor kontrak 2203/UN6.3.1/PT.00/2022

7. REFERENSI

- Barnsley, M. F., 1993. *Fractals Everywhere*. 2nd ed. Atlanta: Academic Press.
- Bhoi, A. K., Mallick, P. K., Kumar, S. S. & Sherpa, K. S., 2015. Brain Tumor Detection: A Comparative Analysis of Edge Detection Techniques. *International Journal of Applied Engineering Research*, Volume 10, pp. 31569-31575.
- Husain, A., Reddy, J., Bisht, D. & Sajid, M., 2021. *Fractal Dimension of Coastline of Australia*, s.l.: Springer Nature.
- I., N. & Sampurno, J., 2018. Analisis Fraktal Untuk Identifikasi Kadar Gula Rambutan dengan Metode. *Prisma Fisika*, VI(2), pp. 57-60.

- Joshi, M. & Vyas, A., 2018. *Comparison of Canny edge detector with Sobel and*. Jodhpur, International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT).
- Richardson, L. F., 1961. *The problem of contiguity: An appendix to Statistics of Deadly Quarrels*. Ann Arbor: General System : Yearbook of the Society for the Advancement of General Systems Theory.
- Ristanovic, D., Jelinek, H. F., Rajkovic, N. & Melosevic, N. T., 2013. *Richardson's Method of Segment Counting versus Box-Counting*. Bucharest, IEEE, pp. 299-305.
- Wu, J., Jin, X., Mi, S. & Tang, J., 2020. An Effective Method to Compute the Box-Counting Dimension Based on the Mathematical Definition and Intervals. *Results in Engineering*, Volume 6, p. 100178.