In Search

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 1 April 2020

SOLUSI PERSAMAAN DINAMIKA GAS MENGGUNAKAN *HOMOTOPY PERTURBATION SUMUDU TRANSFORM METHOD*

Nabila Hasna[1], Endang Rusyaman[2], Alit Kartiwa[3]
[1,2,3)] Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor Sumedang 45363
Email: nabila16029@unpad.ac.id

ABSTRAK

Persamaan diferensial fraksional merupakan pengembangan dari persamaan diferensial, dimana orde turunanya adalah bilangan pecahan. Persamaan diferensial fraksional terbagi kedalam dua bentuk, yaitu persamaan diferensial fraksional dan persamaan diferensial parsial fraksional. Salah satu peranan persamaan diferensial parsial fraksional yaitu dapat menggambarkan dan memodelkan fenomena dalam ilmu sains dan teknologi diantaranya seperti persamaan dinamika gas. Banyak metode untuk menyelesaikan persamaan dinamika gas fraksional, salah satunya *Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method* yang merupakan kombinasi dari Transformasi Sumudu, *Homotopy Perturbation Method,* dan Polinomial He. Metode ini akan digunakan penulis untuk mencari solusi persamaan dinamika gas fraksional homogen. Sehingga dapat diamati jika barisan sebuah persamaan dinamika gas fraksional yang ordenya konvergen ke suatu bilangan akan mengakibatkan barisan dari fungsi solusi persamaan dinamika gas fraksional konvergen ke fungsi solusi persamaan dinamika gas fraksional dengan ordenya adalah bilangan tersebut.

Kata kunci: Persamaan Diferensial Parsial Fraksional, Persamaan Dinamika Gas Fraksional Homogen, *Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method*, Kekonvergenan.

ABSTRACT

Fractional differential equations are the development of differential equations, where the derivative order is a fraction number. Fractional differential equations are divided into two forms, ordinary fractional differential equations and fractional partial differential equations. One of the roles of fractional partial differential equations is to be able to describe and model phenomena in science and technology such as gas dynamics equations. There are many methods to solve gas dynamics fractional equations, one of which is Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method who is a combined from Sumudu Transform, Homotopy Perturbation Method, and He's Polynomials. This method will be used by the author to find solutions of homogeneous and inhomogeneous gas dynamics fractional equations. So it can be observed if sequence a gas dynamics fractional equations whose orders converges to a row of numbers will lead to the solution function of gas dynamics fractional equations converge to the function of the solution of gas dynamics fractional equations with the order are that number.

Keywords: *Fractional Partial Differential Equations*, *Homogeneous Gas Dynamics Fractional Equations*, *Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method*, *Convergence*.

1. PENDAHULUAN

Matematika adalah ilmu universal yang memiliki peranan penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, salah satunya dalam suatu bentuk model matematika. Untuk memodelkan suatu fenomena alam, kajian yang sering digunakan ialah persamaan diferensial fraksional.

Persamaan diferensial fraksional merupakan pengembangan dari persamaan diferensial, dimana persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan dari satu

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 1 April 2020

atau lebih variabel bergantung terhadap satu atau lebih variabel bebas tersebut (Ross, 1984) . Umumnya, turunan persamaan diferensial memuat orde berbentuk bilangan bulat. Namun, untuk persamaan diferensial fraksional turunannya memuat orde pecahan. Persamaan diferensial fraksional dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial fraksional biasa dan persamaan diferensial parsial fraksional. Salah satu pengaplikasian persamaan diferensial fraksional biasa yaitu untuk melihat korelasi antara viskositas dalam cairan dan elastisitas pada benda padat (Rusmayan, et al, 2018). Sedangkan persamaan diferensial parsial fraksional dapat memodelkan fenomena dalam ilmu sains dan teknologi dengan sangat akurat diantaranya seperti persamaan dinamika gas.

Secara umum, persamaan dinamika gas diketahui sebagai bentuk ekspresi matematis dari hukum konservasi seperti konservasi massa, konservasi momentum, dan konservasi energi. Persamaan dinamika gas fraksional dapat diterapkan untuk tiga jenis gelombang nonlinear seperti gelombang kejut, gelombang terpusat, aliran kontak, dan lain-lain (Kumar et all, 2012) Beberapa metode sudah dilakukan untuk menyelesaikan persamaan dinamika gas fraksional diantaranya Metode Transformasi Diferensial (Biazar & Eslami, 2011) *Homotopy Perturbation Transform Method* (Kumar et all, 2012) *Homotopy Perturbation Sumudu Transform Metod* (Singh et al, 2012). *Fractional Homotopy Analysis Transform Method* (Rashidi et al, 2014), *Quadratic B-Spline Galerkin Method* (Esen & Tasbozan, 2015), dan *Fractional Reduced Differential Transform Method* (Tamsir & Srivastava, 2016)

Dalam artikel ini, akan dibahas mengenai penerapan *Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method* (HPSTM) dalam menyelesaikan persamaan dinamika gas dan akan dilihat tingkat keakuratannya. HPSTM merupakan kombinasi dari Transformasi Sumudu, *Homotopy Perturbation Method*, dan polinomial He. Solusi yang dihasilkan merupakan solusi pendekatan yang diperoleh secara numerik dan digambarkan secara grafis.

2. KAJIAN PUSTAKA

Pada bagian ini, diberikan beberapa definisi maupun teori-teori yang akan digunakan dalam artikel ini.

Definisi 2.1 Turunan fraksional *Riemann Liouville* didefinisikan sebagai (Kisela, 2008)

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n}\left[\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt\right]$$

$n-1 < \alpha \le n, n \in \mathbb{N}$, dan $x > 0$.

Definisi 2.2 Turunan fraksional *Caputo* didefinisikan sebagai [5]

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{n}(t)\, dt\right]$$

$n-1 < \alpha \le n, n \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.3 Transformasi *Sumudu* didefinisikan sebagai

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^{\infty} e^{-t} f(ut)\, dt,$$

$u \in (-\tau_1, \tau_2), t \ge 0$.

Definisi 2.4 Transformasi Sumudu dari turunan fraksional Caputo didefinisikan sebagai (Singh et al, 2014)

$$S[D_t^{\alpha} f(t)] = u^{-\alpha} S[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} u^{-\alpha+k} f^{(k)}(0^+),$$

$m-1 < \alpha \le m$.

Definisi 2.5 Misalkan $A \subseteq R$, dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat fungsi $f_n: A \to \mathbb{R}$. Dapat dikatakan (Bartle & Sherbert, 2011).

Definisi 2.6 Misalkan (f_n) barisan fungsi pada $A \subseteq \mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$, $A_0 \subseteq A$, dan $f: A_0 \to \mathbb{R}$. Barisan (f_n) konvergen titik demi titik ke f di A_0 apabila untuk setiap $x \in A_0$, $(f_n(x))$ konvergen ke $f(x)$ di $\mathbb{R}$. Dalam hal ini, f adalah limit dari barisan (f_n) di A_0 (Bartle & Sherbert, 2011).

Definisi 2.7 MAPE adalah rata-rata dari *Absolute Percentage Errors* (APE). Misalkan A_t adalah data aktual dan F_t data ramalan pada waktu t, maka MAPE didefinisikan sebagai (Hsu & Wang, 2009)

$$\boldsymbol{MAPE = \frac{100\%}{N} \sum_{t=1}^{N} \left|\frac{A_t - F_t}{A_t}\right|}.$$

3. METODE PENELITIAN

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 1 April 2020

Penelitian yang digunakan dalam skripsi ini adalah mencari solusi dari persamaan dinamika gas yang dibentuk dari persamaan diferensial parsial fraksional dengan menggunakan metode *Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method* (HPSTM). HPSTM ini merupakan suatu metode yang menggabungkan penerapan transformasi Sumudu, *Homotopy Perturbation Method,* dan Polinomial He. Metode ini diawali dengan menerapkan transformasi Sumudu pada persamaan dinamika gas, dilanjutkan dengan mensubstitusi syarat awal ke persamaan yang terbentuk. Selanjutnya, lakukan invers transformasi Sumudu pada kedua ruas sehingga diperoleh hasil untuk bagian linear. Lalu, menerapkan *Homotopy Perturbation Method* dengan menambahkan parameter sisipan (parameter *homotopy*) serta mengubah bentuk nonlinear menjadi bentuk deret dari Polinomial He dengan tujuan mendapatkan solusi untuk bagian nonlinearnya. Tahap terakhir yaitu membentuk solusi $u(x,t)$ menjadi deret yang diperoleh dari penjumlahan $u_0(x,t), u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots$.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 *Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method*

Diberikan persamaan diferensial parsial fraksional nonlinear nonhomogen sebagai berikut

$$D_t^\alpha u(x,t) + Lu(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t), \quad (1)$$
$$u(x,0) = f(x),$$

dengan $t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha \le 1$, dimana $D_t^\alpha u(x,t)$ adalah turunan fraksional Caputo dari fungsi $u(x,t)$, L adalah operator diferensial linear, N merepresentasikan operator diferensial nonlinear secara umum, $g(x,t)$ adalah fungsi yang diketahui, dan $f(x)$ merupakan kondisi awal yang diketahui.

Menerapkan transformasi Sumudu pada persamaan (1), sehingga didapat

$$S[D_t^\alpha u(x,t) + Lu(x,t) + Nu(x,t)] = S[g(x,t)]. \quad (2)$$

Berdasarkan Definisi 2.4 dan sifat transformasi Sumudu, diperoleh

$$S[u(x,t)] = f(x) + u^\alpha S[g(x,t)] - u^\alpha S[Lu(x,t)] - u^\alpha S[Nu(x,t)]. \quad (3)$$

Selanjutnya, dioperasikan dengan invers Sumudu pada kedua ruas persamaan (3), didapat

$$u(x,t) = f(x) + S^{-1}[\, u^\alpha (S[g(x,t)] - S[Lu(x,t) + Nu(x,t)])]. \quad (4)$$

Menerapkan *Homotopy Perturbation Method* (HPM) pada persamaan (4):

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,t) \quad (5)$$

dan untuk operator nonlinear $Nu(x,t)$ nya menjadi:

$$Nu(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \quad (6)$$

dimana $H_n(u)$ merupakan polinomial He yang di definisikan sebagai berikut:

$$H_n(u) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i\right)\right]_{p=0} \quad (7)$$

$n = 0,1,2,3, \ldots$

Substitusi persamaan (5) dan (6) ke persamaan (4) maka diperoleh,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,t) = u(x,0) + p\left(S^{-1}\left[u^\alpha S\left[g(x,t) - L\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x,t) - \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u)\right]\right]\right). \quad (8)$$

Membandingkan koefisien pangkat dari parameter *homotopy* p, diperoleh:

$$p^0 : u_0(x,t) = u(x,0)$$
$$p^1 : u_1(x,t) = S^{-1}\big[u^\alpha S[g(x,t) - Lu_0(x,t) - H_0(u)]\big]$$
$$p^2 : u_2(x,t) = -S^{-1}\big[u^\alpha S[Lu_1(x,t) + H_1(u)]\big]$$
$$p^3 : u_3(x,t) = -S^{-1}\big[u^\alpha S[Lu_2(x,t) + H_2(u)]\big],$$

$$\vdots$$

Selanjutnya, dengan melakukan hal yang sama akan didapat nilai dari $u_4(x,t), u_5(x,t), u_6(x,t)$, ... Dengan demikian, pendekatan solusi analitik $u(x,t)$ didapatkan:

$$u(x,t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n(x,t). \qquad (10)$$

3.1 Solusi Persamaan Dinamika Gas Fraksional Homogen

Diberikan persamaan dinamika gas fraksional homogen:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u\frac{\partial u}{\partial x} - u + u^2 = 0 \qquad (11)$$

$u(x,0) = e^{-x}, t > 0,\ x \epsilon \mathbb{R}$, dan $0 < \alpha \leq 1$.

Dengan menggunakan *Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method,* berdasarkan (9) dan (10) maka solusi pendekatan dari persamaan dinamika gas fraksional homogen adalah sebagai berikut

$$u(x,t) = e^{-x}\left[1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \cdots\right]. \qquad (12)$$

Selanjutnya akan dilihat kekonvergenan barisan dari solusi persamaan dinamika gas fraksional dengan memilih $(\alpha_k) = \left(\frac{k}{k+1}\right)$ yang konvergen ke $\alpha = 1$. Misalkan $g_k(x,t)$ merupakan solusi pendekatan persamaan dinamika gas fraksional homogen berode α_k. Sehingga akan diperoleh

$$g_1(x,t) = e^{-x}\left[1 + \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + t + \frac{4}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \cdots\right].$$

$$g_2(x,t) = e^{-x}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{9}{8}\frac{t^{\frac{4}{3}}\sqrt{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\pi} + \frac{1}{2}t^2 + \cdots\right].$$

$$g_3(x,t) = e^{-x}\left[1 + \frac{4}{3}\frac{t^{\frac{3}{4}}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{4}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{32}{45}\frac{t^{\frac{9}{4}}\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi} + \cdots\right].$$

$$g_4(x,t) = e^{-x}\left[1 + \frac{5}{4}\frac{t^{\frac{4}{5}}}{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)} + \frac{25}{24}\frac{t^{\frac{8}{5}}}{\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)} + \frac{125}{168}\frac{t^{\frac{12}{5}}\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)}{\pi\csc\left(\frac{2}{5}\pi\right)} + \cdots\right].$$

dan seterusnya untuk k lainnya.

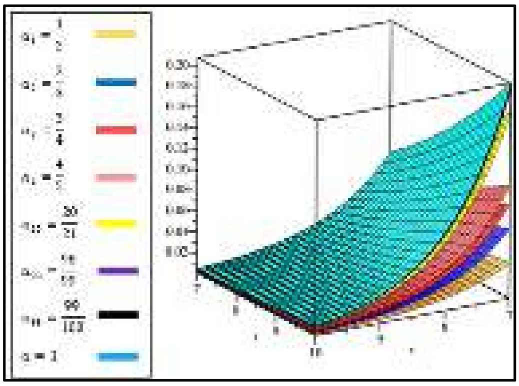
Selanjutnya untuk $\alpha = 1$, solusi persamaan dinamika gas fraksional homogennya adalah sebagai berikut

$$g(x,t) = e^{-x}\left(1 + \frac{t}{\Gamma(2)} + \frac{t^2}{\Gamma(3)} + \frac{t^3}{\Gamma(4)} + \cdots\right).$$

Dengan mengambil limit barisan dari fungsi solusi $\left(g_k(x,t)\right)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left(g_k(x,t)\right) &= \lim_{k\to\infty}\left\{e^{-x}\left[1 + \frac{t^{\left(\frac{k}{k+1}\right)}}{\Gamma\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)+1\right)} + \frac{t^{2\left(\frac{k}{k+1}\right)}}{\Gamma\left(2\left(\frac{k}{k+1}\right)+1\right)} + \frac{t^{3\left(\frac{k}{k+1}\right)}}{\Gamma\left(3\left(\frac{k}{k+1}\right)+1\right)} + \cdots\right]\right\} \\ &= e^{-x}\left(1 + \frac{t}{\Gamma(2)} + \frac{t^2}{\Gamma(3)} + \frac{t^3}{\Gamma(4)} + \cdots\right) \\ &= g(x,t),\end{aligned}$$

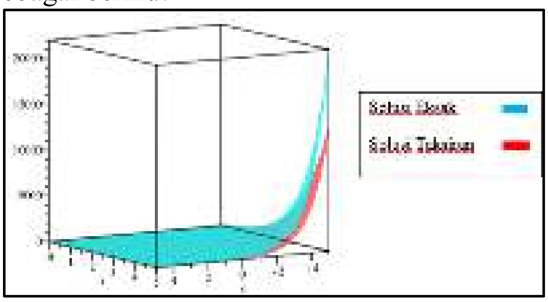
sehingga dapat dikatakan bahwa barisan dari fungsi solusi persamaan dinamika gas fraksional homogen orde (α_k) akan konvergen ke fungsi solusi persamaan dinamika gas fraksional homogen orde α. Apabila disajikan dalam bentuk grafik fungsi solusi, dapat dilihat sebagai berikut



Gambar 1 Grafik Barisan dari Fungsi Solusi Persamaan Dinamika Gas Homogen Berorde $(\alpha_k) = \left(\frac{k}{k+1}\right)$.

3.2 Pengukuran Akurasi

Diketahui persamaan dinamika gas fraksional homogen pada persamaan (11) memiliki solusi pendekatan (13) dan solusi eksak $u(x,t) = e^{-x}$ untuk $\alpha = 1$. Apabila digambarkan dalam bentuk grafik, dapat dilihat sebagai berikut



Gambar 2 Grafik Solusi Pendekatan dan Solusi Eksak Persamaan Dinamika Gas Fraksional Homogen berorde $\alpha = 1$.

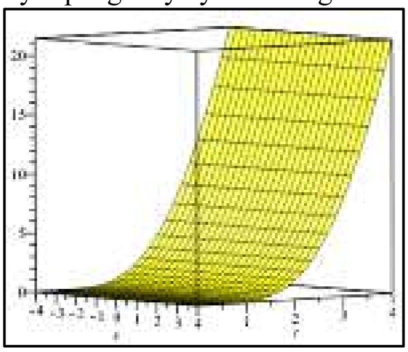
Berdasarkan gambar 4.2 dapat dilihat bahwa terdapat penyimpangan antara solusi eksak dengan solusi pendekatannya, sehingga akan dihitung tingkat penyimpangan menggunakan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) pada $t \in [0,4]$ dan $x = [-4,4]$ dari solusi taksiran $\alpha = 1$ terhadap solusi eksak. Solusi eksak untuk persamaan (13) adalah $u(x,t) = e^{-x}$ (Kisela, 2008)

Perhitungan APE disajikan dalam tabel sebagai berikut,

Tabel 1 Tabel APE Solusi Pendekatan Persamaan Dinamika Gas Terhadap Solusi Eksaknya.

x	t	Solusi pendekatan	Solusi eksak	APE
1	−4	148,32497	148,413159	0,0594184%
1	−2	20,073602	20,0855369	0,0594184%
1	3	0,1352548	0,13533528	0,0594184%
2	−2	53,693807	54,5981500	1,6563608%
3	−1	50,016385	54,5981500	8,3917942%
3	2	2,4901692	2,71828182	8,3917942%
3	3	0,9160820	1	8,3917942%
4	−3	861,00001	1096,63315	21,486961%
4	1	15,769765	20,0855369	21,486961%
4	4	0.7851303	1	21,486961%

Dengan menggunakan MAPE, diperoleh penyimpangan antara solusi eksak dan solusi pendekatannya adalah 9,147088265%, sehingga dapat disimpulkan bahwa Metode *Homotopy Perturbation Sumudu Transform* dapat dikategorikan sangat baik dalam mencari solusi pendekatan Persamaan Dinamika Gas Fraksional. Apabila digambarkan dalam bentuk grafik, penyimpangannya yaitu sebagai berikut



Gambar 3 Grafik Galat Solusi Pendekatan Persamaan Dinamika Gas Fraksional Homogen Terhadap Solusi Eksaknya.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dari perhitungan yang dilakukan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa untuk mencari solusi pendekatan Persamaan Dinamika Gas Fraksional secara numerik dapat menggunakan metode *Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method* (HPSTM). Selain itu, jika dipilih barisan orde (α_n) yang konvergen ke α maka barisan dari fungsi solusi persamaan dinamika gas fraksional

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 1 April 2020

homogen juga akan konvergen ke fungsi solusi persamaan dinamika gas fraksional homogen berorde α dan untuk tingkat keakuratan solusi pendekatan persamaan dinamika gas fraksional homogen menggunakan *Homotopy Perturbation Sumudu Transform Method* (HPSTM) terhadap solusi eksaknya termasuk ke dalam kategori sangat baik, saat $0 < t \leq 4$.

6. REFERENSI

A., E., & O., T. (2015). An Approach to Time Fractional Gas Dynamics Equation: Quadratic B-spline Galerkin Method. *Elsevier*.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis*. United State of America: John Wiley and Sons, Inc.

Biazar, J., & Eslami, M. (2011, March 4). Differential Transform Method for Nonlinear Fractional Gas Dynamucs Equations. *International Journal of the Physical Sciences Vol. 6(5)*, 1203-1206.

Hsu, L., & Wang, C. (2009). Forecasting Integrated Circuit Output Using Multivariate Grey Model And Grey Relational Analysis. *Expert Systems with Applications*, Vol. 35 No. 1 1403-1409.

Kisela, T. (2008). *Fractional Differential Equations and Their Applications*. Crezh Republic: Faculty of Mechanical Engineering, Institute of Mathematics, BRNO University.

Kumar, S., Kocak, H., & Yildirim, A. (2012). A Fractional Model of Gas Dynamics Equations and its Analytical Approximate Solution Using Laplace Transform. *Z. Naturforsch*, 67a, 389-396.

Rashidi, M. M., Kumar, S., Kumar, D., & Freidoonimehr, N. (2014). New Analytical Method for Gas Dynamics Equation Arising in Shock Fronts. *Elsevier B. V.*

Ross, S. L. (1984). *Differential Equations* (Third ed.). New York: John Wiley&Sons. Inc.

Rusyaman, E., Parmikanti, K., Chaerani, D., & Irianingsih, I. (2018). The Convergence of the Order Sequence and the Solution Function Sequence on Fractional Partial Differential Equation. *Journal of Physics: Conference Series*, 012087.

Singh, J., Kumar, D., & Kilicman, A. (2012). Homotopy Perturbation Method for Fractional Gas Dynamics Equation Using Sumudu Transform. *Hindiawi Publishing Corporation*, Volume 2013, Article ID 934060, 8 pages.

Singh, J., Kumar, D., & Kilicman, A. (2014). Numerical Solutions of Nonlinear Fractional Partial Differential Equations Arising in SPatial Diffusion of Biological Populations. *Hindiawi Publishing Corporation*, Volume 2014, Article ID 535793, 12 pages.

Tamsir, M., & Srivastava, V. K. (2016, February 20). Revisiting the Approximate Analytical Solution of Fractional-Order Gas Dynamics Equation. *Alexandria Engineering Journal*.

Watugala, G. K. (1993). Sumudu Transform: A New Integral Transform to Solve Differential Equations and Control Engineering Problems. *Integrated Education*, 24:1, 35-43.