p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 1 April 2020

APROKSIMASI SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL LOGISTIK DENGAN MENGGUNAKAN *SPECTRAL COLLOCATION METHOD*

Pipih Aprianita[1], Eddy Djauhari[2], Endang Rusyaman[3]
[1,2,3)] Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor Sumedang 45363
Email: pipih16001@unpad.ac.id, eddy. djauhari@unpad.ac.id, endang.rusyaman@unpad.ac.id

Abstrak

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan dari suatu fungsi. Persamaan diferensial dengan orde bilangan asli digunakan untuk penyelesaian permasalahan pada model matematika. Selain bilangan asli, orde persamaan diferensial juga dapat berupa nilai fraksional sehingga disebut persamaan diferensial fraksional. Pada penelitian ini penulis mencari aproksimasi solusi persamaan diferensial fraksional logistik menggunakan *Spectral Collocation Method* dengan bantuan polinomial Laguerre yang digeneralisasi, dimana metode ini merupakan metode yang cukup akurat dan efisien dalam mencari aproksimasi solusi persamaan diferensial nonlinear. Keakuratan dari aproksimasi solusi persamaan diferensial fraksional logistik melalui Spectral Collocation Method ditunjukan melalui perhitungan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) serta perbandingan grafik aproksimasi solusi terhadap solusi eksak persamaan diferensial fraksional logistik melalui bantuan *software* Maple 15 dan *Microsoft Excel*.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial Fraksional Logistik, Polinomial Laguerre yang digeneralisasi, *Spectral Collocation Method*

Abstract

Differential equations are equations that involve the derivative of a function. Differential equations with natural number orders are used to solve problems in mathematical models. In addition to natural numbers, order differential equations can also be fractional values that called fractional differential equations. In this study the authors solved the approximate solution for fractional logistic differential equation by using the Spectral Collocation Method with the help of generalized Laguerre polynomials, where this method is a fairly accurate and efficient method in solving nonlinear fractional differential equations. The accuracy approximate solution of fractional logistic differential equation through the Spectral Collocation Method is demonstrated through the calculation of the Mean Absolute Percentage Error (MAPE) as well as a comparison of the graphic approximate solution approach to the exact solution of the fractional logistic differential equation through the help of Maple 15 and Microsoft Excel software.

Keywords: *Fractional Logistic Differential Equations, Generalized Laguerre Polynomials, Spectral Collocation Method.*

1. PENDAHULUAN

Matematika memiliki peran yang penting dalam menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari salah satu cabang matematika yang memiliki peranan sangat luas adalah kalkulus fraksional yaitu cabang ilmu matematika yang menyelidiki sifat turunan dan integral dengan orde bilangan rasional. Secara khusus cabang ilmu ini melibatkan turunan fraksional dan fungsi sembarang atau juga disebut persamaan diferensial fraksional.

Persamaan diferensial fraksioanl dapat dikaji dengan berbagai macam fungsi sembarang dan dengan penyelesaian menggunakan berbagai metode. Beberapa contoh metode dalam menyelesaikan persamaan diferensial fraksional adalah *Variation Iteration Method* (VIM), Transformasi Laplace, dan *Spectral Collocation Method* (SCM), sedangkan salah satu contoh fungsi yang dapat dikaji dalam penyelesaian persamaan diferensial fraksional adalah fungsi logistik.

Fungsi logistik yang didalamnya diterapkan operator turunan fraksional disebut persamaan diferensial fraksional logistik. Persamaan diferensial logistik merupakan salah satu model matematika yang menggambarkan model poulasi kontinu. Dari waktu ke waktu bentuk tiap model dimodifikasi sehingga dapat menggambarkan dengan lebih teliti dari keadaan sebenarnya (Murray, 2011). Salah satu penerapan persamaan logistik ada dalam ilmu kedokteran, yaitu persamaan logistik digunakan untuk meningkatkan pertumbuhan tumor. Kegiatan ini dapat dianggap sebagai ekstensi penggunaan persamaan diferensial logistik dalam kerangka ekologi (Khader & Babatin, 2013).

Salah satu peneliti di bidang fraksional yaitu Al-Bar, pada tahun 2015 ia menyelesaikan aproksimasi solusi persamaan diferensial fraksional logistik dengan menggunakan matriks operasional *Bernstein Polynomials*. Pada tahun yang sama, Alqahtani menyelesaikan aproksimasi solusi persamaan diferensial fraksional Klien-Gordon dengan menggunakan *Spectral Collocation Method*.

Melihat penelitian sebelumnya pada tahun 2013, Khader menyelesaikan aproksimasi solusi persamaan diferensial fraksional logitik dengan menggunakan metode *Spectral Collocation Method*. Menurut Khader (2013), *Spectral Collocation Method* merupakan metode yang efisien dan memiliki keakuratan yang tinggi untuk menyelesaikan solusi numerik pada persamaan diferensial nonlinear. Pada tahun 2011, Khader memperkenalkan metode untuk mencari solusi numerik yang efisien pada penyelesaian persamaan fraksional difusi menggunakan polinomial Chebyshev bergeser. Adapun Xu, pada tahun 2002 menyelesaikan solusi spektral dari persamaan diferensial parsial nonlinear menggunakan polinomial Laguerre yang digeneralisasi.

Seperti halnya Khader dalam menyelesaikan persamaan diferensial fraksional logistik melalui *Spectral Collocation Method*, penulis menggunakan metode yang sama untuk menyelesaikan aproksimasi solusi persamaan diferensial fraksional logistik yang akan dikaji dalam penelitian ini. Namun yang berbeda dalam penelitian ini, penulis akan menghitung *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE) antara aproksimasi solusi persamaan diferensial fraksional logistik melalui *Spectral Collocation Method* dengan solusi eksaknya. Hasil yang didapat akan ditampilkan pada tabel beserta grafik solusinya yang disajikan dengan bantuan *software* Maple 15 dan *Microsoft Excel*.

2. METODE PENELITIAN

Persamaan diferensial fraksional yang digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan diferensial fraksional logistik

$$D^{\alpha}u(t) = \rho u(t)\big(1-u(t)\big), \qquad t>0, \rho > 0 \qquad (1)$$

dimana $0<\alpha\leq 1$, menyatakan order turunan fraksionalnya.

Keterangan:

$u(t)$: banyaknya individu dalam populasi pada waktu t.

ρ : laju pertumbuhan populasi maksimum.

Kondisi awal persamaan diferensial fraksional logistik yaitu

$$u(0) = u_0, \quad u_0 > 0 \qquad (2)$$

dan solusi eksak persamaan diferensial fraksional logistik untuk $\alpha = 1$ adalah

$$u(t) = \frac{u_0}{u_0 + (1-u_0)e^{-\rho t}}. \qquad (3)$$

Metode yang digunakan untuk mencari aproksimasi solusi persamaan diferensial fraksional logistik dalam penelitian ini yaitu *Spectral Collocation Method* (SCM) dengan menggunakan polinomial Laguerre yang digeneralisasi.

Spectral Collocation Method dengan bantuan polinomial Laguerre yang digeneralisasi

Spectral Collocation Method berperan dalam mencari aproksimasi solusi persamaan diferensial fraksional logistik melalui bantuan polinomial Laguerre yang digeneralisasi $L_n^{(\nu)}(x)$. Bentuk polinomial Laguerre yang digeneralisasi dalam derajat n ditulis

$$L_n^{(\nu)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n+\nu}{n-k}x^k$$
$$= \binom{n+\nu}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(\nu+1)_k}\frac{x^k}{k!} \qquad (4)$$

Jika $x=0$ maka $L_n^{(\nu)}(0) = \binom{n+\nu}{n}$. Polinomial ini merupakan polinomial ortogonal pada interval $[0,\infty)$ dengan fungsi pembobot $w(x)$, $w(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} x^\nu$ (5)

Hubungan keortogonalan polinomial Laguerre yang digeneralisasi

$$\frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \int_0^\infty x^\nu e^{-x} L_m^{(\nu)}(x) L_n^{(\nu)}(x) dx = \binom{n+\nu}{n} \delta_{mn.} \quad (6)$$

Polinomial $L_n^{(\nu)}(x)$ diturunkan terhadap x, didapat

$$D^k L_n^{(\nu)}(x) = (-1)^k L_{n-k}^{(\nu+k)}(x), \quad k = 0,1,2,\dots,n. \quad (7)$$

Beberapa fungsi $u(x)$ pada $L_w^2[0,\infty)$ dapat diekspansikan dalam polinomial Laguerre yang digeneralisasi sebagai solusi pendekatannya yaitu sebagai berikut

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i L_i^{(\nu)}(x) \quad (8)$$

dimana koefisien c_i dinyatakan sebagai

$$c_i = \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+\nu+1)} \int_0^\infty x^\nu e^{-x} L_i^{(\nu)}(x) u(x) dx, \quad i = 0,1,\dots \quad (9)$$

dengan hanya memperhatikan $(m+1)$ suku pertama dari polinomial Laguerre yang digeneralisasi maka

$$u_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i L_i^{(\nu)}(x). \quad (10)$$

Adapun untuk mencari turunan polinomial Laguerre yang digeneralisasi dengan mempertimbangkan turunan fraksional Caputo

$$D^\alpha C = 0, \quad C \text{ merupakan konstanta}, \quad (11)$$

$$D^\alpha x^n = \begin{cases} 0 & , \text{untuk } n \in \mathbb{N}, n < \lceil \alpha \rceil; \\ \dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} x^{n-\alpha}, & \text{untuk } n \in \mathbb{N}, n \geq \lceil \alpha \rceil, \end{cases} \quad (12)$$

dimana $\lceil \alpha \rceil$ adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan α, ditunjukkan oleh

$$D^\alpha L_n^{(\nu)}(x) = D^\alpha \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\nu}{n-k} x^k \right] = 0, \quad \text{untuk } n = 0,1,\dots \lceil \alpha \rceil - 1, \alpha > 0 \quad (13)$$

sehingga diperoleh turunan fraksional polinomial Laguerre yang digeneralisasi adalah sebagai berikut

$$D^\alpha L_n^{(\nu)}(x) = 0, \quad n = 0,1,\dots \lceil \alpha \rceil - 1, \alpha > 0. \quad (14)$$

Turunan fraksional dari $u_m(x)$ yang ditunjukkan pada (10) adalah

$$D^\alpha(u_m(x)) = D^\alpha \left[\sum_{i=0}^{m} c_i L_i^{(\nu)}(x) \right] = \sum_{i=0}^{m} c_i D^\alpha \left(L_i^{(\nu)}(x) \right). \quad (15)$$

Dari (14) didapat $D^\alpha L_i^{(\nu)}(x) = 0$, untuk $i = 0,1,\dots \lceil \alpha \rceil - 1, \alpha > 0$.

Sedangkan untuk $\lceil \alpha \rceil, \lceil \alpha \rceil + 1, \dots, m$ dengan mempertimbangkan (11) dan (12) pada (4) maka didapat

$$D^\alpha L_i^{(\nu)}(x) = D^\alpha \left[\sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{i+\nu}{i-k} x^k \right] = \sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{i+\nu}{i-k} x^{k-\alpha}. \quad (16)$$

Dengan menyubstitusikan (16) ke (15), maka didapat

$$D^\alpha(u_m(x)) = \sum_{i=0}^{m} c_i D^\alpha \left(L_i^{(\nu)}(x) \right) = \sum_{i=0}^{m} c_i \left(\sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{i+\nu}{i-k} x^{k-\alpha} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i} c_i \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{i+\nu}{i-k} x^{k-\alpha}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{i} c_i \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{i+\nu}{i-k} x^{k-\alpha}$$

$$= \sum_{i=\lceil \alpha \rceil}^{m} \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^{i} c_i w_{i,k}^{(\alpha)} x^{k-\alpha},$$

dimana $w_{i,k}^{(\alpha)}$ dinyatakan sebagai

$$w_{i,k}^{(\alpha)} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1-\alpha)} \binom{i+\nu}{i-k}, \quad (17)$$

maka turunan fraksional dari $u_m(x)$ adalah

$$D^\alpha(u_m(x)) \cong \sum_{i=\lceil \alpha \rceil}^{m} \sum_{k=\lceil \alpha \rceil}^{i} c_i w_{i,k}^{(\alpha)} x^{k-\alpha}.$$

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 1 April 2020

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Aproksimasi Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Logistik melalui Spectral Collocation Method dengan m iterasi

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{i} c_i w_{i,k}^{(\alpha)} t^{k-v} - \rho\left(\sum_{i=0}^{m} c_i L_i^{(v)}(t)\right)\left(1 - \sum_{i=0}^{m} c_i L_i^{(v)}(t)\right) = 0. \qquad (19)$$

Dengan mengolokasikan (19) pada $(m+1-\lceil\alpha\rceil)$ titik $t_p, p = 0,1,\dots,m-\lceil\alpha\rceil$ maka diperoleh

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{i} c_i w_{i,k}^{(\alpha)} {t_p}^{k-v} - \rho\left(\sum_{i=0}^{m} c_i L_i^{(v)}(t_p)\right)\left(1 - \sum_{i=0}^{m} c_i L_i^{(v)}(t_p)\right) = 0 \qquad (20)$$

dimana $w_{i,k}^{(\alpha)}$ ditunjukkan pada (17).
Selanjutnya, dengan kondisi awal (2) dan (10) maka dapat ditulis

$$\sum_{i=0}^{m} c_i L_i^{(v)}(0) = u_0. \qquad (21)$$

Dari (20) dan (21) menunjukan suatu sistem persamaan nonlinear, dimana terdapat $(m+1)$ persamaan dengan parameter $c_{i,}\ i = 0,1,\dots,m$. Dengan memanggil perintah *fsolve*{[SPNL]} pada *software* Maple 15 didapat nilai $c_{i,}\ i = 0,1,\dots,m$, sehingga diperoleh aproksimasi solusi dari persamaan diferensial fraksional logistik melalui *Spectral Collocation Method* yaitu

$$u(t) = c_0 L_0^{(v)}(t) + c_1 L_1^{(v)}(t) + \cdots + c_m L_m^{(v)}(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i L_i^{(v)}(t) \qquad (22)$$

Aproksimasi Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Logistik melalui Spectral Collocation Method dengan 4 iterasi

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{i} c_i w_{i,k}^{(\alpha)} t^{k-v} - \rho\left(\sum_{i=0}^{4} c_i L_i^{(v)}(t)\right)\left(1 - \sum_{i=0}^{4} c_i L_i^{(v)}(t)\right) = 0. \qquad (23)$$

Dengan mengolokasikan (22) pada 4 titik $t_p, p = 0,1,\dots,3$ maka diperoleh

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{i} c_i w_{i,k}^{(\alpha)} {t_p}^{k-v} - \rho\left(\sum_{i=0}^{4} c_i L_i^{(v)}(t_p)\right)\left(1 - \sum_{i=0}^{m} c_i L_i^{(v)}(t_p)\right) = 0 \qquad (24)$$

dimana $w_{i,k}^{(\alpha)}$ ditunjukkan pada (17).
Selanjutnya, dengan kondisi awal (2) dan (10) maka dapat ditulis

$$\sum_{i=0}^{4} c_i L_i^{(v)}(0) = u_0. \qquad (25)$$

Dari (24) dan (25) menunjukan suatu sistem persamaan nonlinear, dimana terdapat 5 persamaan dengan parameter $c_{i,}\ i = 0,1,\dots,4$. Dengan memanggil perintah *fsolve*{[SPNL]} pada *software* Maple 15 didapat nilai $c_{i,}\ i = 0,1,\dots,4$, sehingga diperoleh aproksimasi solusi dari persamaan diferensial fraksional logistik melalui *Spectral Collocation Method* yaitu

$$u(t) = c_0 L_0^{(v)}(t) + c_1 L_1^{(v)}(t) + c_2 L_1^{(v)}(t) + c_3 L_1^{(v)}(t) + c_4 L_4^{(v)}(t) \qquad (26)$$

Aproksimasi Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Logistik melalui Spectral Collocation Method dengan 5 iterasi

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{k=1}^{i} c_i w_{i,k}^{(\alpha)} t^{k-v} - \rho\left(\sum_{i=0}^{5} c_i L_i^{(v)}(t)\right)\left(1 - \sum_{i=0}^{5} c_i L_i^{(v)}(t)\right) = 0. \qquad (27)$$

Dengan mengolokasikan (4.9) pada 5 titik $t_p, p = 0,1,\dots,4$ maka diperoleh

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{k=1}^{i} c_i w_{i,k}^{(\alpha)} {t_p}^{k-v} - \rho\left(\sum_{i=0}^{5} c_i L_i^{(v)}(t_p)\right)\left(1 - \sum_{i=0}^{5} c_i L_i^{(v)}(t_p)\right) = 0 \qquad (28)$$

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 1 April 2020

dimana $w_{i,k}^{(\alpha)}$ ditunjukkan pada (17).
Selanjutnya, dengan kondisi awal (2) dan (10) maka dapat ditulis

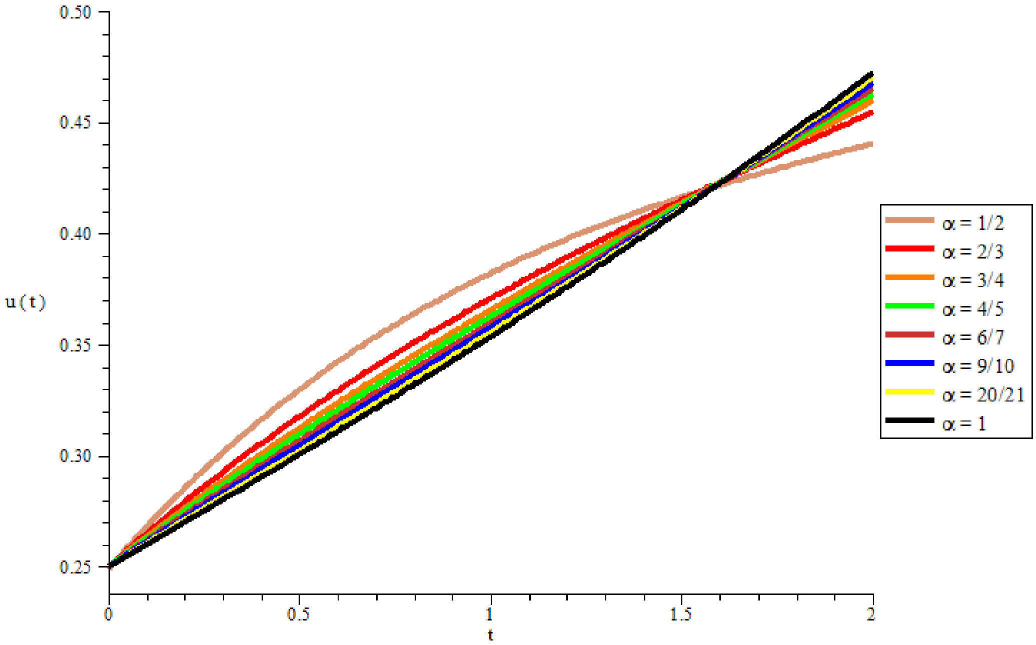
$$\sum_{i=0}^{4} c_i L_i^{(v)}(0) = u_0. \quad (29)$$

Dari (28) dan (29) menunjukan suatu sistem persamaan nonlinear, dimana terdapat 6 persamaan dengan parameter $c_{i,}\ i = 0,1,..,5$. Dengan memanggil perintah *fsolve*{[SPNL]} pada *software* Maple 15 didapat nilai $c_{i,}\ i = 0,1,..,5$, sehingga diperoleh aproksimasi solusi dari persamaan diferensial fraksional logistik melalui *Spectral Collocation Method* yaitu

$$u(t) = c_0 L_0^{(v)}(t) + c_1 L_1^{(v)}(t) + c_2 L_1^{(v)}(t) + c_3 L_1^{(v)}(t) + c_4 L_4^{(v)}(t) + c_5 L_5^{(v)}(t) \quad (30)$$

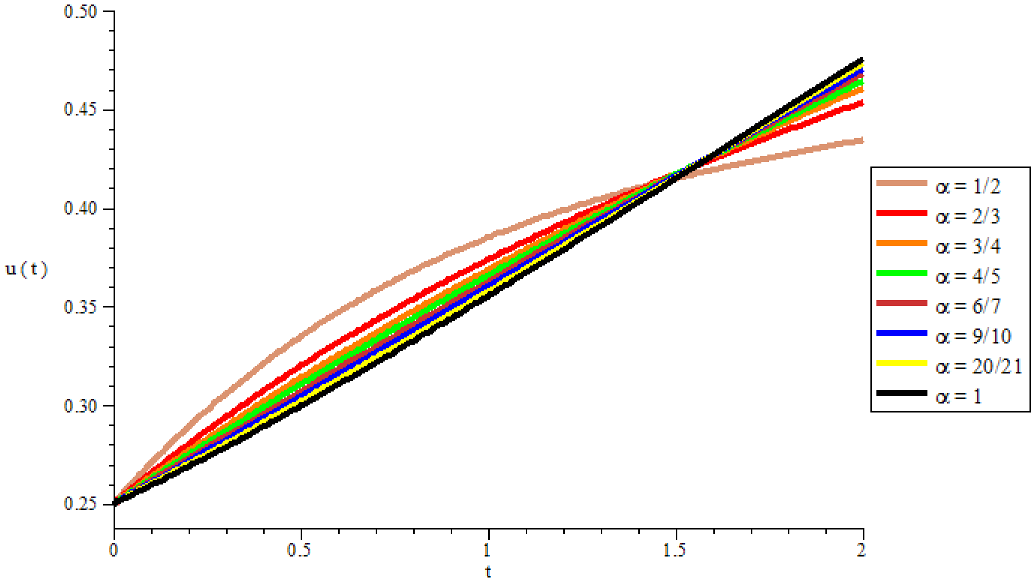
Keakuratan Aproksimasi Solusi PDF Logistik Melalui SCM Terhadap Solusi Eksaknya

Perhitungan numerik dapat dicari dengan menggunakan *software* 15, dimana untuk penelitian ini diberikan $\boldsymbol{\rho = 0,5}$, $\boldsymbol{u_0 = 0,25}$, $\boldsymbol{v = 0}$, **dan** $\boldsymbol{t} = [\boldsymbol{0,2}]$ pada iterasi 4 dan iterasi 5. Keakuratan yang ditunjukkan oleh grafik melalui bantuan *software* Maple 15 dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 1. Grafik aproksimasi solusi PDF Logistik melalui *Spectral Collocation Method* pada iterasi $\boldsymbol{m = 4}$, dengan $\boldsymbol{\rho = 0,5}$, $\boldsymbol{u_0 = 0,25}$, $\boldsymbol{v = 0}$, dan $\boldsymbol{t = [0,2]}$

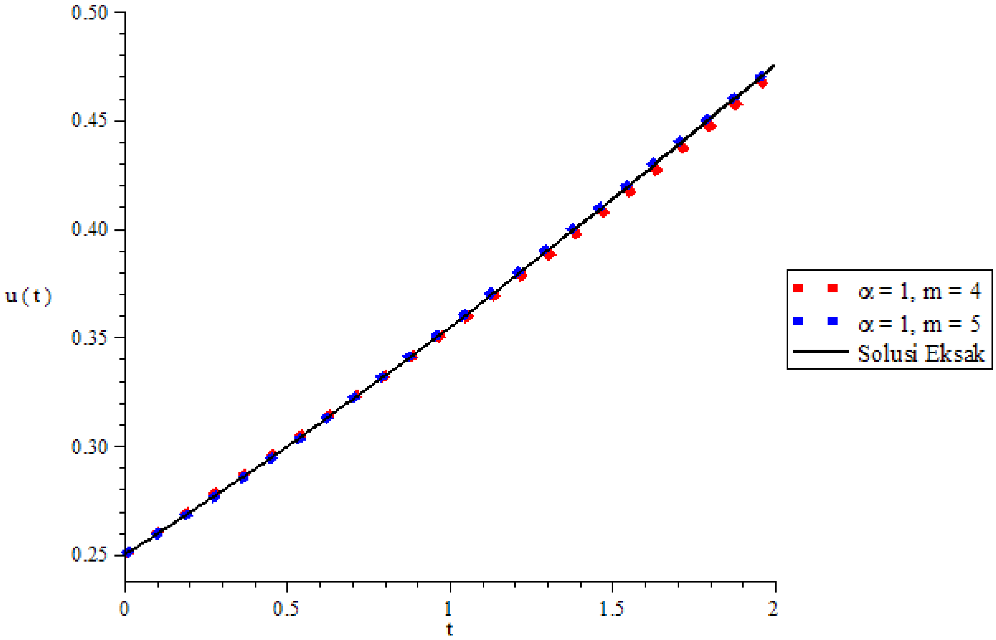
p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 1 April 2020



Gambar 2. Grafik aproksimasi solusi PDF Logistik melalui *Spectral Collocation Method* pada iterasi $m = 5$, dengan $\rho = 0,5$, $u_0 = 0,25$, $\nu = 0$, dan $t = [0,2]$

Dari gambar 1 dan gambar 2 terlihat bahwa grafik aproksimasi solusi berwarna coklat untuk $\alpha = \frac{1}{2}$, grafik aproksimasi solusi berwarna merah untuk $\alpha = \frac{2}{3}$, grafik aproksimasi solusi berwarna orange untuk $\alpha = \frac{3}{4}$, dan grafik aproksimasi solusi lainnya dengan $u_n = \frac{n}{n+1}$ mendekati grafik berwarna hitam, dimana grafik berwarna hitam adalah grafik aproksimasi solusi untuk $\alpha = 1$. Oleh karena itu, barisan fungsi solusi dengan $(u_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ yang konvergen ke $\alpha = 1$ maka barisan fungsi solusinya juga akan konvergen ke fungsi solusi dengan $\alpha = 1$.

Selain grafik aproksimasi solusi PDF Logistik, adapun grafik perbandingan antara PDF Logistik dengan iterasi 4 dan iterasi 5 terhadap solusi eksak PDF Logistik yaitu sebagai berikut



Gambar 3 Grafik perbandingan aproksimasi solusi PDF Logistik pada $m = 5$ dan $m = 4$ pada $\alpha = 1$ terhadap solusi eksaknya di interval $t = [0,2]$

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 1 April 2020

Selain dari grafik, keakuratan aproksimasi solusi PDF Logistik melalui SCM dapat dilihat dari besar kecilnya penyimpangan terhadap solusi eksaknya. Perhitungan ini dapat dibantu oleh *Mean Absolute Precentage Error* (MAPE) yang ditunjukkan oleh

$$MAPE = \frac{100\%}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{|u_A - u_E|}{u_E} \qquad (31)$$

dimana data yang digunakan pada penelitian ini ada 21, maka $N = 21$. Dengan mengambil sampai 10 desimal, melalui *Microsoft Excel* perhitungan MAPE dapat ditunjukkan pada tabel 1.

Tabel 1 Absolut Eror dan nilai MAPE untuk $m = 4$ dan $m = 5$ dengan $N = 21$

t	Solusi Eksak (u_E)	$\lvert u_A - u_E\rvert_{m=4}$	$\lvert u_A - u_E\rvert_{m=5}$
0,0	0,2500000000	0,0000000001	0,0000000001
0,1	0,2594916685	0,0005563531	0,0002673559
0,2	0,2692143495	0,0008926352	0,0003995960
0,3	0,2791639876	0,0010377819	0,0004230035
0,4	0,2893357559	0,0010196049	0,0003616699
0,5	0,2997240426	0,0008648067	0,0002375222
0,6	0,3103224420	0,0005989893	0,0000703530
0,7	0,3211237513	0,0002466570	0,0001221429
0,8	0,3321199731	0,0001687860	0,0003243258
0,9	0,3433023230	0,0006250429	0,0005225649
1,0	0,3546612444	0,0011009391	0,0007051823
1,1	0,3661864285	0,0015764428	0,0008623944
1,2	0,3778668415	0,0020326913	0,0009862445
1,3	0,3896907574	0,0024520246	0,0010705300
1,4	0,4016457981	0,0028180249	0,0011107236
1,5	0,4137189779	0,0031155616	0,0011038877
1,6	0,4258967557	0,0033308431	0,0010485839
1,7	0,4381650916	0,0034514736	0,0009447751
1,8	0,4505095079	0,0034665141	0,0007937260
1,9	0,4629151562	0,0033665494	0,0005978962
2,0	0,4753668864	0,0031437572	0,0003608306
MAPE		**0,4358081119%**	**0,1559193031%**

Dari tabel 1 dapat dilihat bahwa aproksimasi solusi PDF Logistik melalui SCM dengan 4 iterasi memiliki penyimpangan 0,4358081119% terhadap solusi eksaknya, sedangkan solusi PDF Logistik melalui SCM dengan 5 iterasi memiliki penyimpangan 0,1559193031% terhadap solusi eksaknya.

5. KESIMPULAN

Solusi persamaan diferensial fraksional logistik untuk $0 < \alpha \leq 1$ dimana α merupakan order turunan fraksionalnya dapat diperoleh melalui

Spectral Collocation Method dengan bantuan polinomial Laguerre yang digeneralisasi.
Keakuratan solusi PDF Logistik melalui SCM dapat dilihat dari perhitungan MAPE yang nilainya sangat kecil. Jika banyak iterasi 4 menghasilkan nilai MAPE 0,4358081119% dan jika banyak iterasi 5 menghasilkan nilai MAPE 0,1559193031%.

6. REFENSI

Alqahtani, R.T. 2015. *Approximate Solution of Non-Linear Fractional Klein-Gordon Equation Using Spectral Collocation Mtehod*. Apllied Mathematics, 6, 2175-2181

Artin, E. 1964. *The Gamma Function*. Dover Publications. New York, 1964.

Al-Bar, R.F. 2015. *On the Approximate Solution of Fractional Logistic Differential Equation Using Operational Mtrices of Bernstein Polynomials*. Apllied Mathematics, 6, 2096-2103

Boas, M. L. 2006. *Mathematical Method in the Physical Sciences*. Chicago: John Wiley & Sons, Inc.

Gilliland, Michael. 2010. *The Business Forecasting Deal: Exposing Myths, Eliminating Bad Practices, Providing Practical Solutions.* Appendix Forecasting FAQs, Hoboken, N.J: John Wiley & Sons.

Johansyah, M.D., Nahar, J., Supriatna, A. K., & Supian, S. 2017. Kajian Dasar Integral dan Turunan Fraksional Riemann-Liouville, Presented at Industri Research Workshop and National Seminar Politeknik Negeri Bandung.

Khader, M. M. 2011. *On the numerical solutions for the fractional diffusion equation*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, vol. 16, no.6, pp.2535–2542, 2011.

Khader, M. M., & Babatin, M. M. 2013. *On Approximate Solutions for Fractional Logistic Differential Equation*. Mathematical Problems in Engineering, Volume 2013, Article ID 391901, 7 pages.

Kimeu, J. M. 2009. *Fractional Calculus: Differential Equation and Their Applications*. Brno.

Kisela, T. 2008. Mathematical Methods in The Physical Sciences. *Theisis Faculty Of Mechanical Engineering, institute Of Mathemathics,* BRNO University Of Technology.

Loverro, A. 2004. Fractional Calculus: History, Definition, and Application for the Engineer, University of Notre Dame.

Murray, J., .2011. Mathematical Biology: I. An Introduction,, Vol. 17 of 3, *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Springer.

Rusyaman, Ema, Kankan, Sudradjat, Asep K, *The Effect of Surface Pressure and Elasticity to the Surface Minimum Energy with Fractional Order* DOI: 10.3923/jeasci.2017.4851.4855 Journal of Engineering and Applied Science V12 (19), 4851-4855, ISSN: 1816-949X Medwell Journal Engineering 2017.

Sungil, Kim., dan Heeyoung, Kim. 2016. A new metric of absolute percentage error for intermittent demand forecasts. *International Journal of Forecasting*, vol. 32, 669-667.

Xu C.L., & Guo,B.Y. 2002. "Laguerre pseudospectral method for nonlinear partial differential equations," *Journal of Computational Mathematics*, vol. 20 , no. 4, pp. 413–428, 2002.