p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 01, April 2020

PERBANDINGAN SOLUSI PENDEKATAN PERSAMAAN DIFERENSIAL TUNDAAN MENGGUNAKAN SUMUDU *VARIATIONAL ITERATION METHOD* DAN LAPLACE *VARIATIONAL ITERATION METHOD*

Nabil[1], Eddy Djauhari[2], Muhamad Deni Johansyah[3]
[1,2,3)] Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran
Jl. Raya Bandung Sumedang KM 21 Jatinangor Sumedang 45363
Email: nabil16002@mail.unpad.ac.id

Abstrak

Persamaan diferensial tundaan adalah persamaan diferensial dimana variabel bebasnya muncul dengan argumen tertunda. Persamaan diferensial tundaan telah mendapat perhatian selama beberapa tahun terakhir sejak persamaan ini telah terbukti menjadi alat yang berharga dalam pemodelan banyak fenomena di berbagai bidang sains dan teknologi. Beberapa metode telah digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tundaan seperti Laplace *Variational Iteration Method* dan Sumudu *Variational Iteration Method*. Laplace *Variational Iteration Method* merupakan kombinasi dari transformasi Laplace dan *Variational Iteration Method* sedangkan Sumudu *Variational Iteration Method* merupakan kombinasi dari transformasi Sumudu. Penulis akan menggunakan kedua metode ini untuk menyelesaikan persamaan diferensial tundaan serta membandingkan keakuratan solusi pendekatannya terhadap solusi eksaknya menggunakan *Mean Absolute Percentage Error* agar mengetahui metode mana yang lebih baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial tundaan.

Kata Kunci : Persamaan Diferensial Tundaan, Laplace *Variational Iteration Method,* Sumudu *Variational Iteration Method, Mean Absolute Percentage Error*

Abstract

Delay differential equations are a differential equation where the state variable appears with delayed argument. Delay differential equations have received increasing during recent year since these equations have been proved to be valuable tools in the modelling of many phenomena in various fields of science and engineering. Some method have been succeeded in solving delay differential equations such as Lapace Variational Iteration Method and Sumudu Variational Iteration Method. Lapace Variational Iteration Method is a combination of Laplace transform and Variational Iteration Method and also Sumudu Variational Iteration Method is a combination of Sumudu transform and Variational Iteration Method. The author will use both of these methods in solving delay differential equations and the author will compare the approach solution with the exact solution using Mean Absolute Percentage Error in order to know which methods are better in solving delay differential equations.

***Keywords**: Delay Differential Equations, Laplace Variational Iteration Method, Sumudu Variational Iteration Method, Mean Absolute Percentage Error*

1. PENDAHULUAN

Matematika adalah ilmu universal yang sangat diperlukan diberbagai macam bidang yang mendasari perkembangan teknologi pada saat ini serta berperan dalam berbagai macam ilmu di dunia. Cabang ilmu matematika sangatlah luas salah satunya adalah turunan yang sangat banyak pengaplikasiannya di kehidupan sehari-hari misalnya perubahan laju kendaraan, menghitung kemiringan dari sebuah garis singgung dan laju pertumbuhan rata-rata populasi.

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984). Persamaan diferensial tundaan adalah persamaan diferensial dimana variabel bebasnya muncul dengan argumen tertunda. Persamaan diferensial tundaan telah mendapat perhatian selama beberapa tahun terakhir sejak persamaan ini telah terbukti menjadi alat yang berharga dalam pemodelan banyak fenomena di berbagai bidang sains dan teknologi (Nouiua et al, 2017). Beberapa metode telah digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tundaan diantaranya *Differential Transform Method* (Karakoc & Bereketoglu, 2007), *Block Hybrid Methods*, *Laplace Variational Iteration Method* (Biala, 2014) dan *Sumudu Variational Iteration Method* (Vilu et al, 2019)

Pada penelitian ini, penulis mengkaji cara mencari solusi persamaan diferensial tundaan menggunakan *Laplace Variational Iteration Method* dan *Sumudu Variational Iteration Method*. Kemudian solusi pendekatan tersebut diukur tingkat akurasinya terhadap solusi eksaknya menggunakan MAPE serta membandingkan kedua metode tersebut agar diketahui metode mana yang lebih baik untuk menyelesaikan persamaan diferensial tundaan.

2. KAJIAN PUSTAKA

Pada bagian ini, diberikan beberapa definisi maupun teori-teori yang akan digunakan dalam artikel ini.

2.1 Fungsi Gamma

Definisi 2.1 Fungsi gamma yang dinotasikan dengan $\Gamma(p)$ didefinisikan sebagai

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0.$$

2.2 Transformasi Laplace

Definisi 2.2 Transformasi Laplace didefinisikan sebagai berikut

$$F(s) = L\big(f(t)\big) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

dimana $t \geq 0$.

2.3 Transformasi Sumudu

Transformasi *Sumudu* dikenalkan pada awal tahun 1990-an oleh Gamage K. Watugala dan didefinisikan dari sebagai berikut

Definisi 2.3 Transformasi *Sumudu* didefinisikan atas serangkaian fungsi berikut

$$A = \left\{ f(t) : \exists\, M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{\tau_j}}, jika\ t \in (-1)^j \times [0, \infty), j = 1,2 \right\}$$

sebagai

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^\infty e^{-t} f(ut)\, dt, \;\; u \in (-\tau_1, \tau_2)$$

dimana $t \geq 0$.

2.4 *Variational Iteration Method*

Variational Iteration Method (VIM) pertama kali dikembangkan oleh He pada tahun 2007 untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial nonlinear. Misal diberikan persamaan diferensial nonlinear :

$$\frac{d^m v}{dt^m} + R(v) + N(v) = f(t),$$

dimana R adalah operator linear, N adalah operator nonlinear, $f(t)$ adalah fungsi kontinu dengan kondisi awal $v^{(k)}(0) = v_0^k$. Langkah pertama dari *VIM* adalah membuat persamaan koreksi terhadap persamaan diferensial nonlinear di atas. Persamaan koreksi dinotasikan sebagai berikut

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 01, April 2020

$$\boldsymbol{v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda(t,\tau)\left(\frac{d^m v}{dt^m} + R(v) + N(v) - f(t)\right) d\tau.}$$

2.5 *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE)

Definisi 2.4 MAPE adalah rata-rata dari *Absolute Percentage Errors* (APE). Misalkan y_t adalah data aktual dan $\hat{y}_t$ data prediksi pada waktu t, dan n merupakan banyaknya prediksi, maka MAPE didefinisikan sebagai (Hsu & Wang, 2009)

$$\boldsymbol{MAPE = \frac{100\%}{n}\sum_{t=1}^{N}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right|.}$$

3. METODE PENELITIAN

3.1 *Laplace Variational Iteration Method* (LVIM)

Diberikan persamaan koreksi sebagai berikut :

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda(t,\tau)\left(\frac{d^m v}{dt^m} + R(v) + N(v) - f(t)\right) d\tau \qquad (1)$$

Menerapkan transformasi Laplace pada persamaan (1), sehingga didapat

$$L[v_{n+1}(t)] = L\left[v_n(t) + \int_0^t \lambda(t,\tau)\left(\frac{d^m v}{dt^m} + R(v) + N(v) - f(t)\right)\right] \qquad (2)$$

Berdasarkan Definisi 2.2 dan sifat transformasi Laplace, diperoleh

$$\bar{v}_{n+1}(s) = \bar{v}_n(s) + \lambda(s)\left[s^m\left(\bar{v}_n(s) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{s^{k+1}}\frac{d^k v(t)}{dt^k}\,|_{t=0}\right) + L[R(v)] + L[N(v)] - L[f(t)]\right] \qquad (3)$$

Selanjutnya, misal persamaan (3) stasioner terhadap $\bar{v}_n(s)$, diperoleh

$$\frac{\delta\bar{v}_{n+1}(s)}{\delta\bar{v}_n(s)} = \frac{\delta\bar{v}_n(s)}{\delta\bar{v}_n(s)} + \frac{\lambda(s)\delta}{\delta\bar{v}_n(s)}\left[s^m\left(\bar{v}_n(s) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{s^{k+1}}\frac{d^k v(t)}{dt^k}\,|_{t=0}\right) + L[R(v)] + L[N(v)] - L[f(t)]\right]$$

$$\frac{\delta\bar{v}_{n+1}(s)}{\delta\bar{v}_n(s)} = 1 + \lambda(s)s^m$$

$$\lambda(s) = -s^{-m},$$

dimana m merupakan orde turunan

$$\bar{v}_{n+1}(s) = \bar{v}_n(s) - \frac{1}{s^m}\left[s^m\left(\bar{v}_n(s) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{s^{k+1}}\frac{d^k v(t)}{dt^k}\,|_{t=0}\right) + L[R(v)] + L[N(v)] - L[f(t)]\right] \qquad (4)$$

Selanjutnya, dioperasikan dengan invers transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan (4), didapat

$$v_{n+1}(t) = L^{-1}\left[\left[\left(\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{s^{k+1}}\frac{d^k v(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}\right) - L[R(v)] - L[N(v)] + L[f(t)]\right]\right]. \quad (5)$$

Langkah berikutnya adalah melakukan iterasi $v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)$ dan seterusnya. Pada artikel ini akan dilakukan hingga $v_4(t)$.

3.2 *Sumudu Variational Iteration Method* (SVIM)

Diberikan persamaan koreksi sebagai berikut :

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + \int_0^t \lambda(t,\tau)\left(\frac{d^m v}{dt^m} + R(v) + N(v) - f(t)\right)d\tau \quad (6)$$

Menerapkan transformasi Sumudu pada persamaan (6), sehingga didapat

$$S[v_{n+1}(t)] = S\left[v_n(t) + \int_0^t \lambda(t,\tau)\left(\frac{d^m v}{dt^m} + R(v) + N(v) - f(t)\right)\right] \quad (7)$$

Berdasarkan Definisi 2.3 dan sifat transformasi Sumudu, diperoleh

$$v_{n+1}(u) = \bar{v}_n(u) + \lambda(u)\left[u^{-m}\left(\bar{v}_n(u) - \sum_{k=0}^{m-1}u^k\frac{d^k v(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}\right) + S[R(v)] + S[N(v)] - S[f(t)]\right]. \quad (8)$$

Selanjutnya, misal persamaan (8) stasioner terhadap $\bar{v}_n(s)$, diperoleh

$$\frac{\delta\bar{v}_{n+1}(u)}{\delta\bar{v}_n(u)} = \frac{\delta\bar{v}_n(u)}{\delta\bar{v}_n(u)} + \frac{\lambda(u)\delta}{\delta\bar{v}_n(u)}\left[u^{-m}\left(\bar{v}_n(u) - \sum_{k=0}^{m-1}u^k\frac{d^k v(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}\right) + S[R(v)] + S[N(v)] - S[f(t)]\right]$$

$$\frac{\delta\bar{v}_{n+1}(u)}{\delta\bar{v}_n(u)} = 1 + \lambda(u)u^{-m}$$

$$\lambda(s) = -u^m,$$

dimana m merupakan orde turunan

$$\bar{v}_{n+1}(u) = \bar{v}_n(u) - u^m\left[u^{-m}\left(\bar{v}_n(u) - \sum_{k=0}^{m-1}u^k\frac{d^k v(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}\right) + S[R(v)] + S[N(v)] - S[f(t)]\right] \quad (9)$$

Selanjutnya, dioperasikan dengan invers transformasi Sumudu pada kedua ruas persamaan (9), didapat

$$v_{n+1}(t) = S^{-1}\left[\left[\left(\sum_{k=0}^{m-1}u^k\frac{d^k v(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}\right) - S[R(v)] - S[N(v)] + S[f(t)]\right]\right]. \quad (10)$$

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 01, April 2020

Langkah berikutnya adalah melakukan iterasi $v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t)$ dan seterusnya. Pada artikel ini akan dilakukan hingga $v_4(t)$.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Solusi Persamaan Diferensial Tundaan Nonhomogen

Diberikan persamaan diferensial tundaan nonlinear nonhomogen orde satu :

$$v'(t) = 1 - 2v^2\left(\frac{t}{2}\right) \qquad (11)$$

dengan syarat awal $v(0) = 0$ dan solusi eksak $v(t) = \sin t$ serta $0 < t \leq 1$.

- **Laplace VIM**

Dengan menggunakan ***Laplace Variational Iteration Method***, berdasarkan (4) dan (5) maka solusi pendekatan dari persamaan diferensial tundaan nonlinear nonhomogen orde satu adalah sebagai berikut

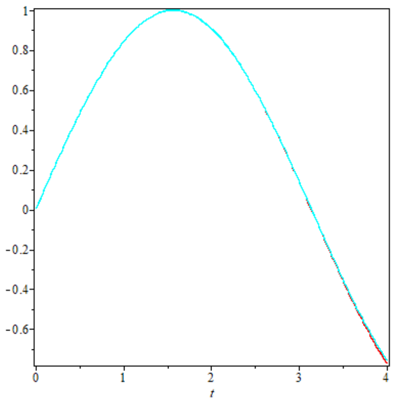
$$v_1(t) = t$$

$$v_2(t) = t - \frac{t^3}{6}$$

$$v_3(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{8064}$$

$$v_4(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040} + \frac{61}{23224320}t^9 - \frac{67}{3406233600}t^{11} + \frac{t^{13}}{12881756160} - \frac{t^{15}}{7990652436480}. \qquad (12)$$

Apabila digambarkan dalam bentuk grafik, solusi eksak dan solusi pendekatannya dapat dilihat pada gambar 1 di bawah ini



Gambar 1. Grafik Solusi Pendekatan dan Solusi Eksak Persamaan Diferensial Tundaan Orde Satu Menggunakan Laplace VIM

Dari gambar 1 terlihat bahwa terdapat penyimpangan antara solusi eksak dan solusi pendekatan menggunakan Laplace VIM, sehingga dapat dicari nilai galatnya.

- Sumudu VIM

Dengan menggunakan ***Sumudu Variational Iteration Method***, berdasarkan (9) dan (10) maka solusi pendekatan dari persamaan diferensial tundaan nonlinear nonhomogen orde satu adalah sebagai berikut

$$v_1(t) = t$$

$$v_2(t) = t - \frac{t^3}{6}$$

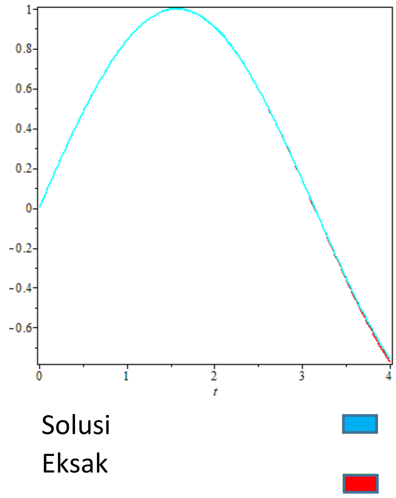
$$v_3(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{8064}$$

$$v_4(t) = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040} + \frac{61}{23224320}t^9 - \frac{67}{3406233600}t^{11} + \frac{t^{13}}{12881756160} - \frac{t^{15}}{7990652436480}. \qquad (13)$$

Solusi Eksak

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 01, April 2020

Apabila digambarkan dalam bentuk grafik, solusi eksak dan solusi pendekatannya dapat dilihat pada gambar 2 di bawah ini



Gambar 2 Grafik Solusi Pendekatan dan Solusi Eksak Persamaan Diferensial Tundaan Orde Satu Menggunakan Sumudu VIM

Dari gambar 2 terlihat bahwa terdapat penyimpangan antara solusi eksak dan solusi pendekatan menggunakan Laplace VIM, sehingga dapat dicari nilai galatnya.

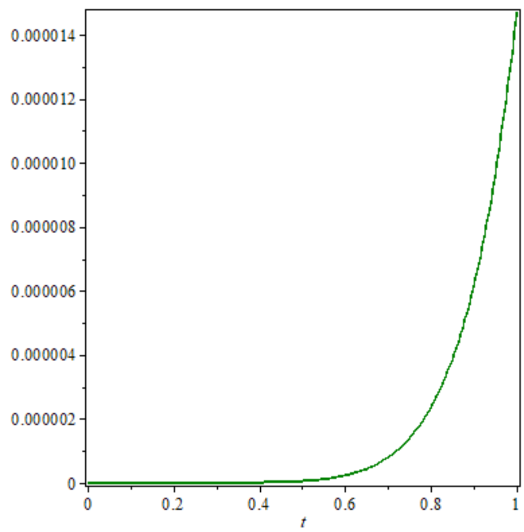
4.2 Pengukuran Akurasi

Diketahui persamaan diferensial tundaan nonhomogen orde satu pada persamaan (11) memiliki solusi pendekatan menggunakan Laplace VIM (12), solusi pendekatan menggunakan Sumudu VIM (13) dan solusi eksak $v(t) = \sin t$. Berdasarkan gambar 1 dan 2 kedua solusi pendekatan memiliki galat terhadap solusi eksaknya, sehingga akan dihitung tingkat penyimpangan atua galat menggunakan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE). Perhitungan MAPE disajikan dalam tabel sebagai berikut

Tabel 1 Tabel MAPE Solusi Pendekatan Persamaan Diferensial Tundaan
Terhadap Solusi Eksaknya Menggunakan Laplace VIM

t	Solusi pendekatan	Solusi eksak	APE
0,1	0,0998334166 4	0.0998334166 5	$1,00166861 \cdot 10^{-10}$
0,2	0,1986693309	0.1986693308	$5,03348954 \cdot 10^{-10}$
0,3	0,2955202067	0.2955202067	0
0,4	0,3894183422	0.3894183423	$2,56793245 \cdot 10^{-10}$
0,5	0,4794255384	0.4794255386	$4,17165928 \cdot 10^{-10}$
0,6	0,5646424721	0.5646424734	$2,30234185 \cdot 10^{-9}$
0,7	0,6442176821	0.6442176872	$7,91657866 \cdot 10^{-9}$
0,8	0,7173560740	0.7173560909	$2,35587321 \cdot 10^{-8}$
0,9	0,7833268612	0.7833269096	$6,17877407 \cdot 10^{-8}$
1,0	0,8414708609	0.8414709848	$1,47242153 \cdot 10^{-7}$
	$\boldsymbol{MAPE = 0.000002440850220\%}$		

. Apabila digambarkan dalam bentuk grafik, galat atau penyimpangan solusi pendekatan persamaan diferensial tundaan orde satu terhadap solusi eksak persamaan diferensial tundaan orde satu menggunakan Laplace VIM yaitu sebagai berikut



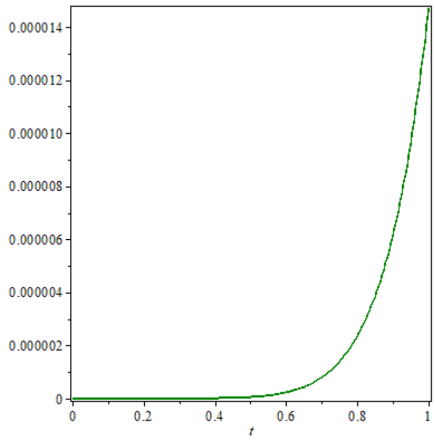
Gambar 3 Grafik Galat Solusi Pendekatan Persamaan Diferensial Tundaan Orde Satu Terhadap Solusi Eksaknya Menggunakan Laplace VIM

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 01, April 2020

Tabel 2 Tabel MAPE Solusi Pendekatan Persamaan Diferensial Tundaan
Terhadap Solusi Eksaknya Menggunakan Laplace VIM

t	**Solusi pendekatan**	**Solusi eksak**	**APE**
0,1	0,0998334166 4	0.0998334166 5	$1,00166861 \cdot 10^{-10}$
0,2	0,1986693309	0.1986693308	$5,03348954 \cdot 10^{-10}$
0,3	0,2955202067	0.2955202067	0
0,4	0,3894183422	0.3894183423	$2,56793245 \cdot 10^{-10}$
0,5	0,4794255384	0.4794255386	$4,17165928 \cdot 10^{-10}$
0,6	0,5646424721	0.5646424734	$2,30234185 \cdot 10^{-9}$
0,7	0,6442176821	0.6442176872	$7,91657866 \cdot 10^{-9}$
0,8	0,7173560740	0.7173560909	$2,35587321 \cdot 10^{-8}$
0,9	0,7833268612	0.7833269096	$6,17877407 \cdot 10^{-8}$
1,0	0,8414708609	0.8414709848	$1,47242153 \cdot 10^{-7}$
$\boldsymbol{MAPE = 0.000002440850220\%}$			

Apabila digambarkan dalam bentuk grafik, galat atau penyimpangan solusi pendekatan persamaan diferensial tundaan orde satu terhadap solusi eksak persamaan diferensial tundaan orde satu menggunakan Sumudu VIM yaitu sebagai berikut



Gambar 4 Grafik Galat Solusi Pendekatan Persamaan Diferensial Tundaan Orde Satu Terhadap Solusi Eksaknya Menggunakan Sumudu VIM

Dengan menggunakan MAPE, diperoleh galat atau penyimpangan antara solusi eksak dan solusi pendekatannya adalah 0.000002440850220%, sehingga dapat disimpulkan bahwa Metode *Laplace VIM* dan *Sumudu VIM* adalah identik karena solusi pendekatan dan galat yang diperoleh sama serta kedua metode ini dapat dikategorikan sangat baik dalam mencari solusi pendekatan Persamaan Diferensial Tundaan Nonhomogen Orde Satu

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada skripsi ini maka dapat disimpulkan bahwa persamaan diferensial diferensial tundaan orde satu, dua dan tiga yang digunakan memiliki solusi dengan menggunakan Laplace *Variational Iteration Method* dan Sumudu *Variational Iteration Method*. Untuk tingkat keakuratan solusi pendekatan persamaan diferensial tundaan orde satu, dua dan tiga dengan menggunakan Laplace *Variational Iteration Method* dan Sumudu *Variational Iteration Method* terhadap solusi eksaknya yang dilakukan hingga iterasi keempat termasuk ke dalam kategori sangat baik karena galat yang diperoleh dibawah 10% bahkan di bawah 1%. Galat akan semakin mendekati nol jika iterasi dilakukan lebih dari empat kali. Laplace *Variational Iteration Method* dan Sumudu *Variational Iteration Method* merupakan metode yang identik dikarenakan solusi pendekatan yang dihasilkan dari perhitungan kedua metode sama sehingga galat yang didapatkan terhadap solusi eksaknya pun sama.

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 19 No. 01, April 2020

6. REFERENSI

Biala, T. A., Asim, O. O., & Afolabi, Y. O. (2014). A combination of the Laplace Transform and The Variational Iteration Method for The Analytical Treatment of Delay Differential Equations. *acadpubl.eu*, 164-175.

Hsu, L., & Wang, C. (2009). Forecasting Integrated Circuit Output Using Multivariate Grey Model And Grey Relational Analysis. *Expert Systems with Applications*, Vol. 35 No. 1 1403-1409.

Karakoc, F., & Bereketoglu, H. (2007). Solutions of delay differential equations by using differential transform method. *Taylor and Francis*, 914-923.

Nouioua, F., Ardjouni, A., Merzougui, A., & Djoudi, A. (2017). Existence of Positive Periodic Solutions for A Third-Order Delay Differential Equation. *International Journal of Analysis and Applications*, 136-143.

Ross, S. L. (1984). *Differential Equations* (Third ed.). New York: John Wiley&Sons. Inc.

Vilu, S., Ahmad, R. R., & Salma Din, U. K. (2019). Variational Iteration Method and Sumudu Transformasi for Solving Delay Differential Equation. *Hindawi*, 1-6.

Watugala, G. K. (1993). Sumudu Transform : a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. *Taylor and Francis*, 35-43.