In Search

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 21 No. 02, November 2022

Penyelesaian Persamaan Diferensial Fraksional Riccati menggunakan Teorema Gabungan Adomian Laplace

Muhamad Deni Johansyah[1], Salma Az-Zahra[2]
[1,2]Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran
Email: muhamad.deni@unpad.ac.id, salma18025@mail.unpad.ac.id

Abstrak

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan fungsi yang tak diketahui, turunan, atau diferensialnya. Dilihat dari bentuk fungsi atau pangkatnya persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial linear dan tak linear. Persamaan diferensial pada umumnya memiliki orde bilangan asli, namun persamaan diferensial dapat dikembangkan lagi menjadi bentuk orde pecahan. Persamaan diferensial yang memiliki orde bilangan pecahan disebut Persamaan Diferensial Fraksional (PDF). Salah satu bentuk PDF tak linear adalah PDF Riccati. Banyak peneliti yang telah meneliti solusi hampiran PDF Riccati dengan menggunakan berbagai metode. Satu metode maupun dua metode yang digabungkan. Dalam penelitian ini akan dicari penyelesaian PDF Riccati dengan menggunakan Teorema Gabungan *Adomian decomposition method* dan transformasi Laplace (Adomian Laplace). Selanjutnya dibuat grafik solusi PDF Riccati menggunakan Teorema Gabungan Adomian Lapalce dan solusi eksak, dihasilkan grafik yang berimpit satu sama lain.
Kata Kunci: Persamaan diferensial fraksional, Riccati, Adomian Laplace.

Abstract

Judging from the function or rank, differential equations can be divided into two, namely linear and nonlinear differential equations. Differential equations generally have the order of natural numbers, but differential equations can be further developed into fractional order form. A differential equation that has the order of fractional is called a Fractional Differential Equations (FDE). One form of nonlinear FDEs is Riccati's FDEs. Many researchers have researched Riccati's FDEs approximation using various methods. One method or two methods combined. In this research, the solution to Riccati FDEs will be search using the Combined Theorem of the Adomian decomposition method and the Laplace transformation (Adomian Laplace). Next, a graphic of Riccati PDF solutions is created using the Adomian Lapalce Combined Theorem and exact solutions, resulting graphs that coincide with each other.
***Keywords**: Fractional differential equaition, Riccati, Adomian Laplace.*

1. PENDAHULUAN

Persamaan diferensial pada umumnya memiliki orde bilangan asli, namun persamaan diferensial dapat dikembangkan lagi menjadi bentuk orde pecahan. Persamaan diferensial yang memiliki orde bilangan pecahan disebut Persamaan Diferensial Fraksional (PDF). Salah satu bentuk PDF taklinear adalah PDF Riccati.

Beberapa peneliti telah meneliti solusi hampiran PDF Riccati dengan menggunakan berbagai metode, diantaranya Abbasbandy (2006) membahas Adomian Decomposition Method (ADM), Odibat dan Momani (2008) membahas homotopy perturbation method, Tan dan Abbasbandy (2008) membahas *homotopy analysis method*, Gülsu dan Sezer (2006) membahas *Taylor matrix method*, serta Li dan Hu (2010) membahas metode Haar wavelet. Selain itu, beberapa peneliti juga

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 21 No. 02, November 2022

menggabungkan berbagai metode dalam menyelesaikan solusi hampiran PDF Riccati, hal tersebut dilakukan untuk mempermudah dan lebih efektif dalam mencari solusi hampiran PDF Riccati. Para peneliti yang menggabungkan dua metode, diantaranya Khan *et al*., (2013) menggabungkan transformasi Laplace, ADM, dan pendekatan Padé untuk mencari solusi PDF Riccati yang didekati secara analitik, serta Johansyah *et al*., (2022) menggabungkan ADM dengan transformasi Kashuri-Fundo untuk mencari solusi PDF Riccati pada model pertumbuhan ekonomi.

Pada penelitian ini akan dicari penyelesaian PDF Riccati menggunakan Teorema Gabungan *Adomian decomposition method* dan transformasi Laplace (Adomian Laplace), dimana dibagian akhir penelitian ini disajikan pola grafik solusi hampiran PDF Riccati yang akan dibandingkan dengan grafik solusi eksak.

2. METODE PENELITIAN

Pada bagian ini dibahas tentang pencarian solusi dari persamaan diferensial fraksional Riccati menggunakan Teorema Gabungan Adomian dengan bentuk umum sebagai berikut

$$\begin{aligned} D_t^\alpha y(t) &= P + Qy(t) + Ry^2(t), \\ y(0) &= k, \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $t \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, P, Q, R adalah konstanta, dan k adalah nilai awal.

Merujuk pada Johansyah *et al*. (2022), ADM adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak linear berdasarkan nilai awal dan hasil perhitungannya cukup efektif untuk menghampiri solusi eksak, dengan bentuk persamaan yang diberikan oleh

$$D_t^\alpha y(t) = g(t) - Ry(t) - Ny(t), \tag{2}$$

dan solusinya yaitu

$$y_0 = y(0) + I^\alpha[g(t)], \tag{3}$$

$$y_{n-1} = -I^\alpha[Ry_n] - I^\alpha[A_n], n \geq 0, \tag{4}$$

di mana $A_n = A_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$, didefinisikan sebagai polinomial Adomian

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0}, \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{5}$$

Definisi 1. (Podlubny, 1999**)**. Transformasi Lapalace $f(t)$ didefinisikan sebagai berikut.

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt. \tag{6}$$

Definisi 2. (Podlubny, 1999) Invers Transformasi Lapalace $F(s)$ didefinisikan sebagai berikut.

$$Ff(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)], \tag{7}$$

Dengan $t > 0$ dan $\mathcal{L}^{-1}$ disebut operator invers tranformasi Laplace.

Teorema 3. (Podlubny, 1999) Transformasi Laplace dari operator integral fraksional Riemann-Liouville dengan orde $\alpha > 0$ adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^{-\alpha} f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}[t^{\alpha-1}]\mathcal{L}[f(t)] \\ &= s^{-\alpha} F(s), v > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Teorema 4. (Podlubny, 1999) Transformasi Laplace ke turunan pecahan Caputo dengan $(n-1) < \alpha < n$ adalah

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{\alpha-m-1} f^{(m)}(0). \tag{9}$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Teorema Gabungan Adomian Laplace

Diberikan PDF tak linear Riccati sebagai berikut:

$$D_t^\alpha y(t) = P + Qy(t) + Ry^2(t), \tag{10}$$

dengan $t \geq 0$, syarat awal $y(0) = k$, dan $D_t^\alpha y(t)$ adalah turunan fraksional Caputo dari fungsi $y(t)$ terhadap t dengan orde α, dimana $0 < \alpha \leq 1$.

Transformasikan persamaan (10) ke dalam transformasi Laplace, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D_t^\alpha y(t)] = \mathcal{L}[P] + \mathcal{L}[Qy(t)] \\ + \mathcal{L}[Ry^2(\mathrm{t})]. \end{aligned} \tag{11}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 4 persamaan (11) menjadi

$$\begin{aligned} s^\alpha \mathcal{L}[y(t)] - \sum_{m=0}^{n-1} s^{\alpha-m-1} y^{(m)}(0) \\ = \mathcal{L}[P] + \mathcal{L}[Qy(t)] + \mathcal{L}[Ry^2(t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^\alpha \mathcal{L}[y(t)] - s^{\alpha-1} y(0) \\ = \mathcal{L}[P] + \mathcal{L}[Qy(t)] + \mathcal{L}[Ry^2(t)]. \end{aligned}$$

Bagi kedua ruas dengan s^α, diperoleh

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 21 No. 02, November 2022

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{y(0)}{s} + \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[P] + \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[Qy(t)] + \frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[Ry^2(t)].$$

Gunakan invers transformasi Laplace untuk menemukan solusi $y(t)$, diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[y(t)]] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{y(0)}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[P]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[Qy(t)]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[Ry^2(t)]\right],$$

$$y(\mathrm{t}) = y(0) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[P]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[Qy(t)]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[Ry^2(t)]\right]. \qquad (12)$$

ADM mengasumsikan bahwa fungsi $y(t)$ merupakan jumlah deret tak hingga sebagai berikut:

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t), \qquad (13)$$

dan operator tak linear $y^2(t)$ dapat didekomposisi menjadi

$$Ny(t) = y^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \qquad (14)$$

di mana $A_n = A_n\,(y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ adalah polinomial Adomian yang dapat diuraikan sebagai berikut:

$$A_0 = N(y_0) = y_0^2, \qquad (15)$$

$$A_1 = y_1 N'(y_0) = 2y_0 y_1, \qquad (16)$$

$$A_2 = y_2 N'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!}N''(y_0) = 2y_0 y_2 + y_1^2, \qquad (17)$$

$$A_3 = y_3 N'(y_0) + y_1 y_2 N''(y_0) + \frac{y_1}{3!}N'''(y_0) = 2y_0 y_3 + 2y_1 y_2, \qquad (18)$$

$$\vdots$$

Substitusikan persamaan (13) dan (14) ke persamaan (12), sehingga diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = y(0) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[P]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}\left[Q\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)\right]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}\left[R\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\right]\right],$$

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \dots$$

$$y(t) = y(0) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[P]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[Q(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots)]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[R(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots)]\right]. \qquad (19)$$

Dari persamaan (19), diperoleh iterasi dengan rekursif sebagai berikut:

$$y_0(t) = y(0) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[P]\right], \qquad (20)$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[Qy_0]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[RA_0]\right], \qquad (21)$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[Qy_1]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[RA_1]\right], \qquad (22)$$

$$\vdots$$

$$y_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[Qy_{n-1}]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[RA_{n-1}]\right]. \qquad (23)$$

Jadi Teorema Gabungan Adomian Laplace adalah

$$y_0(t) = y(0) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[P]\right], \qquad (24)$$

$$y_n = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[Qy_{n-1}]\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}\mathcal{L}[RA_{n-1}]\right], \qquad (25)$$

dengan $n \geq 1$.

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 21 No. 02, November 2022

3.2 Teorema Gabungan Adomian Laplace

Pada bagian ini disajikan solusi PDF Riccati menggunakan Teorema Gabungan Adomian Laplace. Diberikan PDF Riccati sebagai berikut.

$$D_t^{\alpha}(y) = 1 + 2y(t) - y^2(t), \tag{26}$$

dengan $0 < \alpha \leq 1$ dan kondisi awal $y(0) = 0$. Solusi eksak untuk $\alpha = 1$ berdasarkan Odetunde dan Taiwo (2014) adalah

$$y(t) = 1 + \sqrt{2}\tanh\left[\sqrt{2}t + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right]. \tag{27}$$

3.2.1 Teorema Gabungan Adomian Laplace

Berdasarkan Teorema Gabungan Adomian Laplace, solusi hampiran persamaan diferensial fraksional Riccati (26) diperoleh:

$$y_0 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}[1]\right]. \tag{28}$$

$$y_{n+1} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}[2y_n]\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\alpha}}\mathcal{L}[A_n]\right], \tag{29}$$

dimana A_n adalah polinomial Adomian dari operator nonlinear $Ny(t) = y^2(t)$, yang dapat diuraikan sebagai berikut:

$$A_0 = y_0^2, \tag{30}$$

$$A_1 = 2y_0y_1, \tag{31}$$

$$A_2 = 2y_0y_2 + y_1^2, \tag{32}$$

$$\vdots$$

Berikut ini adalah deskripsi dari persamaan (28) dan (29):

$$y_0 = y_0(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{33}$$

$$y_1 = y_1(t) = \frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}, \tag{34}$$

$$y_2 = y_2(t) = \frac{4t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{2\Gamma(2\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} - \frac{4\Gamma(3\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{2\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\Gamma^3(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \tag{35}$$

$$\vdots$$

Didapat solusi persamaan (26) dengan menggunakan Teorema Gabungan Adomian Laplace adalah

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + \cdots \tag{36}$$

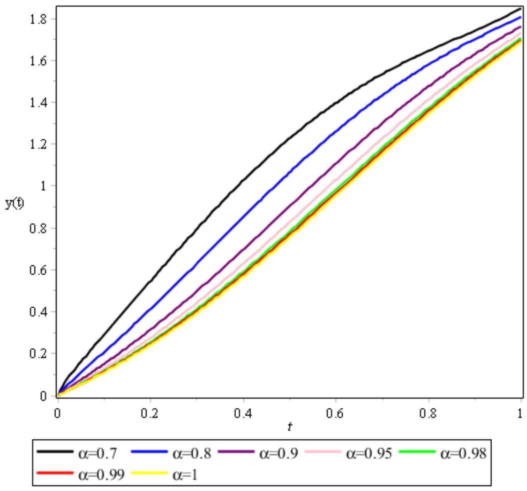
$$y(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{4t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{2\Gamma(2\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} - \frac{4\Gamma(3\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)} + \frac{2\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\Gamma^3(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} + \cdots. \tag{37}$$

- Untuk $\alpha = 0{,}7$
$$y(t) = 1{,}10055\, t^{0,7} + 1{,}61009\, t^{1,4} + 1{,}13554\, t^{2,1} - 2{,}30015\, t^{2,8} + 0{,}6813\, t^{3,5} + \cdots \tag{38}$$
- Untuk $\alpha = 0{,}8$
$$y(t) = 1{,}07367\, t^{0,8} + 1{,}39897\, t^{1,6} + 0{,}78893\, t^{2,4} - 1{,}57951\, t^{3,2} + 0{,}38365\, t^{4} + \cdots \tag{39}$$
- Untuk $\alpha = 0{,}9$
$$y(t) = 1{,}03975\, t^{0,9} + 1{,}19297\, t^{1,8} + 0{,}52451\, t^{2,7} - 1{,}0441\, t^{3,6} + 0{,}23103\, t^{4,5} + \cdots \tag{40}$$
- Untuk $\alpha = 0{,}95$
$$y(t) = 1{,}02053\, t^{0,95} + 1{,}09448\, t^{1,9} + 0{,}42057\, t^{2,85} - 0{,}83777\, t^{3,8} + 0{,}1764\, t^{4,75} + \cdots \tag{41}$$
- Untuk $\alpha = 0{,}98$
$$y(t) = 1{,}00837\, t^{0,98} + 1{,}03727\, t^{1,96} + 0{,}36633\, t^{2,94} - 0{,}73117\, t^{3,92} + 0{,}14931\, t^{4,9} + \cdots \tag{42}$$
- Untuk $\alpha = 0{,}99$
$$y(t) = 1{,}0042\, t^{0,99} + 1{,}01855\, t^{1,98} + 0{,}34953\, t^{2,97} - 0{,}69828\, t^{3,96} + 0{,}14112\, t^{4,95} + \cdots \tag{43}$$
- Untuk $\alpha = 1$
$$y(t) = t + t^2 + 0{,}33333\, t^3 - 0{,}66667\, t^4 + 0{,}13333 t^5 + \cdots. \tag{44}$$

Selanjutnya gunakan bantuan Maple 18 untuk membuat grafik solusi PDF Riccati dengan mengunakan Teorema Gabungan Adomian Laplace. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

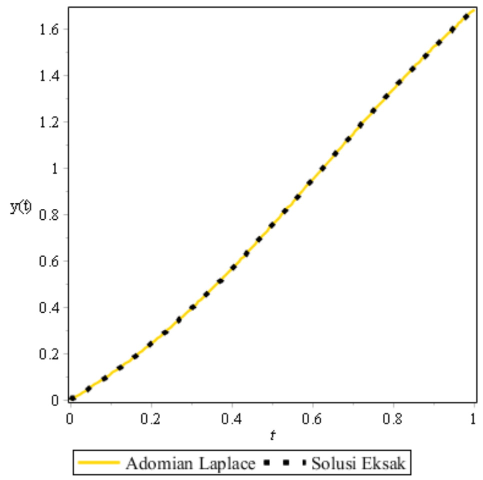
1. *Import library plots* menggunakan *syntax with(plots)*.
2. *Import library laplace* menggunakan *syntax* paket *with(inttrans)*.
3. Definisikan nilai $\alpha = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}95;\ 0{,}98;\ 0{,}99;\ 1$ dan nilai $k = 10$ sebagai nilai iterasi untuk =.
4. Definisikan rumus ADM dan lakukan looping dalam prosesnya.
5. Definisikan rumus Teorema Gabungan Adomian Laplace dengan menggunakan fungsi *laplace* dan lakukan *looping* dalam prosesnya.
6. Buat grafik dengan *syntax plots()*.

Adapun hasil grafiknya menggunakan *Maple* 18 dengan parameter $\alpha = 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9; 0{,}95; 0{,}98; 0{,}99; 1$ untuk $0 \le t \le 1$, disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik solusi hampiran PDF Riccati menggunakan Teorema Gabungan Adomian Laplace.

Selanjutnya, Gambar 2 merupakan perbandingan solusi eksak (*dot* bewarna hitam) dan solusi hampiran PDF Riccati dengan menggunakan Adomian Laplace (kurva mulus bewarna kuning) untuk parameter $\alpha = 1$ domain $0 \le t \le 1$, dan iterasi yang digunakan sampai 10.



Gambar 2. Perbandingan solusi eksak dengan solusi hampiran PDF Riccati.

Gambar 2 menunjukkan bahwa solusi hampiran PDF Riccati dengan menggunakan Teorema Gabungan Adomian Laplace berimpit dengan solusi eksak ketika iterasi yang digunakan sampai 10 iterasi, sehingga dapat disimpulkan solusi hampiran yang diperoleh adalah benar.

4. SIMPULAN

Solusi hampiran PDF Riccati dapat diselesaikan dengan menggunakan Teorema Gabungan Adomian Laplace dengan mentrasformasikan PDF Riccati ke dalam transformasi Laplace. Solusi yang diperoleh adalah sama dan pola grafik yang diperoleh berimpit dengan solusi eksak, sehingga solusi hampiran yang diperoleh benar.

5. DAFTAR PUSTAKA

Abbasbandy, S. (2006). Homotopy perturbation method for quadratic Riccati differential equation and comparison with Adomian’s decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, *172*(1), 485-490.

Gülsu, M., & Sezer, M. (2006). On the solution of the Riccati equation by the Taylor matrix method. *Applied Mathematics and Computation*, *176*(2), 414-421.

Johansyah, M. D., Supriatna, A. K., Rusyaman, E., & Saputra, J. (2022). Solving the Economic Growth Acceleration Model

p-ISSN: 2085-7993
e-ISSN: 2580-3239
Volume 21 No. 02, November 2022

with Memory Effects: An Application of Combined Theorem of Adomian Decomposition Methods and Kashuri–Fundo Transformation Methods. *Symmetry*, *14*(2), 192.

Khan, N. A., Ara, A., & Alam Khan, N. (2013). Fractional-order Riccati differential equation: analytical approximation and numerical results. *Advances in Difference Equations*, *2013*(1), 1-16.

Li, Y. L., & Hu, L. (2010). Solving fractional Riccati differential equations using Haar wavelet. In *2010 Third International Conference on Information and Computing* (Vol. 1, pp. 314-317). IEEE.

Odetunde, O. S., & Taiwo, O. A. (2014). A decomposition algorithm for the solution of fractional quadratic Riccati differential equations with Caputo derivatives. *Am. J. Comput. Appl. Math*, *4*(3), 83-91.

Odibat, Z., & Momani, S. (2008). Modified homotopy perturbation method: application to quadratic Riccati differential equation of fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals*, *36*(1), 167-174.

Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equation*. New York: Academic Press.

Tan, Y., & Abbasbandy, S. (2008). Homotopy analysis method for quadratic Riccati differential equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *13*(3), 539-546.