e-ISSN: 2580-3239
p-ISSN: 2085-7993
Volume 22 No. 2 November 2023

Analisis Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan Metode Variasi Parameter dan Metode Dekomposisi Kamal

Siti Aizal Yasni Ellena, Muhamad Deni Johansyah, Herlina Napitupulu
Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Padjadjaran
Email: siti19025@mail.unpad.ac.id; muhamad.deni@unpad.ac.id; herlina@unpad.ac.id.

Abstrak

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas. Berdasarkan bentuk fungsi, pangkat, dan koefisiennya, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi linear dan tak linear. Pada umumnya, persamaan diferensial berorde bilangan asli, namun dengan adanya studi terkait kalkulus fraksional, berkembanglah persamaan diferensial berorde pecahan yang disebut Persamaan Diferensial Fraksional (PDF). Salah satu bentuk PDF tak linear adalah PDF Riccati. Banyak metode yang telah digunakan untuk menyelesaikan PDF Riccati, diantaranya adalah Metode Variasi Parameter (VPM) dan Metode Dekomposisi Kamal. Tujuan penelitian ini untuk mencari solusi hampiran PDF Riccati menggunakan kedua metode tesebut, kemudian dilakukan analisis perbandingan berdasarkan *Mean Absolute Error* (MAE) untuk mengetahui metode yang lebih akurat. Dalam penelitian ini diambil dua bentuk permasalahan PDF Riccati. Selanjutnya, kedua bentuk masalah tersebut dicari solusi hampirannya sampai iterasi ketiga dan disimulasikan lebih lanjut dengan grafik menggunakan Maple 18 sampai iterasi kelima. Berdasarkan analisis perbandingan, solusi hampiran PDF Riccati dari kedua bentuk yang diperoleh menggunakan VPM lebih akurat dibandingkan dengan Metode Dekomposisi Kamal.

Kata Kunci: PDF Riccati, Metode Variasi Parameter, Dekomposisi Kamal.

Abstract

A differential equation is an equation that involves the derivative of one or more dependent variables on one or more independent variables. Based on the form of the function, power, and coefficients, differential equations are classified into linear and non-linear. Differential equations generally have the order of natural numbers, but with the study of fractional calculus, differential equations developed into fractional order form which are called Fractional Differential Equations (FDEs). One form of non-linear FDEs is Riccati's FDEs. Many methods have been used to solve Riccati's FDEs, one of which is the Variation of Parameters Method (VPM) and Kamal Decomposition Method. The purpose of this research is to find an approximate solution of PDF Riccati using these two methods, then a comparison analysis based on Mean Absolute Error (MAE) is carried out to find out which method is more accurate. In this research, two forms of Riccati's FDEs problems were taken. Furthermore, the two forms of problems are sought for approximate solutions until the third iteration and further simulated with graphs using Maple 18 until the fifth iteration. Based on the comparison analysis, the Riccati's FDEs approximation solutions of the two problem forms obtained using VPM are more accurate than the Kamal Decomposition Method.

Keywords: *Riccati's FDEs, Variation of Parameters, Kamal Decomposition.*

e-ISSN: 2580-3239
p-ISSN: 2085-7993
Volume 22 No. 2 November 2023

1 PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984). Persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan parsial. Selain itu, persamaan diferensial diklasifikasikan pula menjadi linear dan tak linear. Persamaan diferensial dikatakan linear apabila variabel terikat dan turunannya berderajat satu serta semua koefisiennya merupakan suatu konstanta atau hanya bergantung pada variabel bebas, jika salah satu dari kondisi tersebut tidak terpenuhi, maka persamaan diferensial dikatakan tak linear (Boyce & DiPrima, 2008).

Pada umumnya, persamaan diferensial berorde bilangan asli, namun dengan adanya studi terkait kalkulus fraksional, berkembanglah persamaan diferensial berorde pecahan atau fraksional. Persamaan diferensial berorde fraksional disebut Persamaan Diferensial Fraksional (PDF). Salah satu contoh PDF tak linear adalah PDF Riccati.

PDF Riccati berkaitan erat dengan aplikasi dalam pembentukan model *dynamic games*, sistem linier dengan lompatan markovian, aliran sungai, model ekonometrik, kontrol stokastik, teori masalah difusi, dan persamaan modal (Johansyah et al., 2019). Banyak penelitian yang telah dilakukan untuk mencari solusi hampiran PDF Riccati, diantaranya Momani dan Shawagfeh (2006) membahas *Adomian Decomposition Method* (ADM), Tan dan Abbasbandy (2008) membahas *Homotopy Analysis Method* (HAM), Jafari dan Tajadodi (2010) membahas *Variational Iteration Method* (VIM), dan Haq dkk. (2020) membahas *Variation of Parameters Method* atau dalam penelitian ini disebut Metode Variasi Parameter (VPM). Selain itu, terdapat penelitian-penelitan yang menggabungkan metode dengan suatu transformasi integral untuk menyelesaikan solusi hampiran PDF Riccati, hal ini dilakukan agar pencarian solusi dapat lebih efektif dan sederhana. Beberapa penelitian tersebut diantaranya dilakukan oleh Anjum dan He (2019) yang menggabungkan VIM dengan transformasi Laplace dan Johansyah dkk. (2021) yang menggabungkan ADM dengan transformasi Kamal atau dalam penelitian ini disebut Metode Dekomposisi Kamal.

Kedua metode di atas yaitu VPM dan Metode Dekomposisi Kamal merupakan metode yang efektif dengan tingkat keakuratan yang baik dalam menyelesaikan PDF. Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis menerapkan kedua metode tersebut untuk memperoleh solusi hampiran PDF Riccati, kemudian dianalisis dengan membandingkan solusi eksak dengan solusi hampiran yang diperoleh untuk mengetahui metode yang lebih akurat dalam menyelesaikan PDF Riccati.

2 KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Gamma

Definisi 2.1 (Kimeu, 2009) *Fungsi Gamma untuk* $x \in \mathbb{R}^+$ *dinotasikan dengan* $\Gamma(x)$ *adalah fungsi* $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *yang didefinisikan sebagai berikut*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(x-1)} dt.$$

Fungsi Gamma memiliki beberapa sifat, diantaranya:

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$
2. $\Gamma(x) = (x-1)!, \ x \in \mathbb{N}.$

2.2 Integral Fraksional

Definisi 2.2 (Kimeu, 2009) *Misalkan* $v > 0$ *dan misalkan pula* f *kontinu bagian demi bagian pada interval* $(0,\infty)$ *dan integrabel pada sembarang subinterval* $[0,\infty)$. *Maka untuk* $x > 0$, *integral fraksional Riemann-Liouville dari* f *dengan orde* v, *didefinisikan sebagai*

$$ {}_cI_x^v f(x) = {}_cD_x^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t)\, dt$$

dimana c dan x *merupakan batas bawah dan batas atas integral*.

Dalam penelitian ini, $I^v f(x) = D^{-v} f(x)$ menotasikan integral fraksional Riemann-Liouville dengan batas bawah 0 dan batas atas x, yaitu

$$I^v f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} f(t)\, dt.$$

e-ISSN: 2580-3239
p-ISSN: 2085-7993
Volume 22 No. 2 November 2023

Teorema 2.3 (Kimeu, 2009) *Integral fraksional berorde v dari suatu fungsi polinom $f(x) = x^{\mu}$ dengan $v > 0, \mu > -1, x > 0$ adalah*

$$D^{-v}f(x) = D^{-v}x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+v+1)}x^{\mu+v}.$$

2.3 Turunan Fraksional

Definisi 2.4 (Kimeu, 2009) *Misalkan $v = n - u$, dimana $0 < v < 1$ dan n bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari u. Maka, turunan fraksional Riemann-Liouville dari $f(x)$ dengan orde u adalah*

$$D^{u}f(x) = D^{n}[D^{-v}f(x)].$$

Selain turunan fraksional Riemann-Liouville, terdapat beberapa definisi turunan fraksional lainnya seperti Definisi 2.5 berikut.

Definisi 2.5 (Li et al., 2011) *Turunan fraksional Caputo dengan orde α dari fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut*

$$D^{\alpha}f(x) = D^{-(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1}f^{(m)}(t)dt,$$

dimana $m - 1 < \alpha < m$ dan $m \in \mathbb{Z}^{+}$.

2.4 Transformasi Kamal

Definisi 2.6 (Sedeeg, 2016) *Diberikan suatu himpunan fungsi A sebagai berikut*

$$A := \left\{ f(t) : \exists M, k_1, k_2 > 0.\ |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{k_j}},\ t \in (-1)^j \times [0,\infty), j = 1,2 \right\}.$$

Misalkan $f(t)$ fungsi yang kontinu bagian demi bagian, maka transformasi Kamal dari fungsi $f(t)$ dinotasikan sebagai $\mathcal{K}[f(t)] = G(v)$ dan didefinisikan sebagai berikut

$$\mathcal{K}[f(t)] = G(v) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\frac{t}{v}}dt,$$

dimana $t > 0$ dan $k_1 \le v \le k_2$.
Selanjutnya, invers dari transformasi Kamal dinotasikan sebagai berikut

$$\mathcal{K}^{-1}(G(v)) = f(t).$$

Teorema 2.7 (Johansyah *et al.*, 2022a) *Transformasi Kamal dari turunan fraksional Caputo didefinisikan sebagai berikut*

$$\mathcal{K}[D^{\alpha}f(t)] = \frac{G(v)}{v^{\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{v^{\alpha-k-1}},$$

dimana $n-1 < \alpha < n,\ n \in \mathbb{Z}^{+}$.

Teorema 2.8 (Johansyah *et al.*, 2022b) *Persamaan Diferensial Fraksional Tak Linear Riccati dengan bentuk umum*

$$D^{\alpha}y(t) = a + by(t) + cy^2(t),$$

dimana $t > 0, 0 < \alpha \le 1$, dengan syarat nilai awal $y(0) = y_0$ dan a, b, c adalah koefisien konstan, serta $f(t, y(t)) = a + by(t) + cy^2(t)$ kontinu untuk setiap $t > 0$, mempunyai solusi yang tunggal untuk $y \in C(A)$, dimana

$$C(A) = \{f: A \to \mathbb{R} \mid kontinu\ pada\ A = [0,n]\}.$$

3 METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur, yaitu dengan mengkaji buku ataupun jurnal yang berkaitan dengan permasalahan yang dibahas. Pada penelitian ini penulis menyelesaikan masalah PDF menggunakan VPM dan Metode Dekomposisi Kamal, kemudian solusi yang diperoleh dianalisis dengan membandingkannya dengan solusi eksak. PDF yang digunakan adalah PDF Riccati berorde α dengan koefisien konstan sebagai berikut

$$D_t^{\alpha}y(t) = P + Qy(t) + Ry^2(t), \quad (3.1)$$

dimana $t > 0, 0 < \alpha \le 1$, syarat nilai awal

$$y(0) = k, \quad (3.2)$$

dan P, Q, R adalah koefisien konstan.

e-ISSN: 2580-3239
p-ISSN: 2085-7993
Volume 22 No. 2 November 2023

3.1 Metode Variasi Parameter (VPM)

Berdasrkan (Haq *et al.*, 2020), solusi umum masalah PDF Riccati (3.1) menggunakan VPM adalah sebagai berikut

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \lambda(t,\tau)\big(P + Qy(\tau) + Ry^2(\tau)\big)d\tau,$$

dimana $\lambda(t,\tau)$ adalah pengali Lagrange yang dirumuskan sebagai

$$\lambda(t,\tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Nilai y_0 diperoleh menggunakan syarat nilai awal (3.2), sehingga

$$y_0 = k.$$

Kemudian, solusi (3.3) dihampiri menggunakan skema iteratif berikut

$$y_{n+1}(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\Big(P + Qy_n(\tau) + Ry_n^2(\tau)\Big)d\tau,$$

dengan $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

3.2 Metode Dekomposisi Kamal

Metode Dekomposisi Kamal adalah sebuah metode yang menggabungkan ADM dengan transformasi integral yaitu transformasi Kamal. Berdasarkan (Johansyah et al., 2022a) berikut metode pencarian solusi menggunakan Metode Dekomposisi Kamal.

Diberikan PDF Riccati berorde α sebagai berikut

$$D_t^\alpha y(t) = P + Qy(t) + Ry^2(t), \tag{3.3}$$

dimana $D_t^\alpha y(t)$ adalah Turunan Fraksional Caputo dari $y(t)$ terhadap t dengan $t > 0$, $0 \le \alpha \le 1$, dan syarat nilai awal

$$y(0) = k.$$

Transformasikan persamaan (3.3) menggunakan transformasi Kamal, diperoleh

$$\mathcal{K}[D_t^\alpha y(t)] = \mathcal{K}[P + Qy(t) + Ry^2(t)]. \tag{3.4}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema 2.8, persamaan (3.4) menjadi

$$\frac{G(v)}{v^\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(0)}{v^{\alpha-k-1}} = \mathcal{K}[P] + \mathcal{K}[Qy(t)] + \mathcal{K}[Ry^2(t)].$$

Karena $0 < \alpha \le 1$ dan $n-1 < \alpha < n$, pilih $n = 1$. Sehingga

$$\frac{G(v)}{v^\alpha} - \sum_{k=0}^{0}\frac{y^{(k)}(0)}{v^{\alpha-k-1}} = \mathcal{K}[P] + \mathcal{K}[Qy(t)] + \mathcal{K}[Ry^2(t)],$$
$$\frac{G(v)}{v^\alpha} - \frac{y(0)}{v^{\alpha-1}} = \mathcal{K}[P] + \mathcal{K}[Qy(t)] + \mathcal{K}[Ry^2(t)],$$

kalikan kedua ruas dengan v^α, diperoleh

$$\begin{aligned} G(v) - vy(0) &= v^\alpha\mathcal{K}[P] + v^\alpha\mathcal{K}[Qy(t)] \\ &\quad + v^\alpha\mathcal{K}[Ry^2(t)], \\ G(v) &= vy(0) + v^\alpha\mathcal{K}[P] + \\ &v^\alpha\mathcal{K}[Qy(t)] + v^\alpha\mathcal{K}[Ry^2(t)]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Terapkan invers transformasi Kamal ke persamaan (3.5), diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{-1}[G(v)] &= \mathcal{K}^{-1}\big[vy(0) + v^\alpha\mathcal{K}[P] \\ &\quad + v^\alpha\mathcal{K}[Qy(t)] \\ &\quad + v^\alpha\mathcal{K}[Ry^2(t)]\big], \\ y(t) &= y(0) + \mathcal{K}^{-1}\big[v^\alpha\mathcal{K}[P]\big] \\ &\quad + \mathcal{K}^{-1}\big[v^\alpha\mathcal{K}[Qy(t)]\big] \\ &\quad + \mathcal{K}^{-1}\big[v^\alpha\mathcal{K}[Ry^2(t)]\big]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

ADM mengasumsikan fungsi $y(t)$ sebagai suatu deret tak hingga sebagai berikut

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \tag{3.7}$$

dan operator tak linear $y^2(t)$ sebagai deret polinom tak hingga sebagai berikut

$$Ny(t) = y^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{3.8}$$

dimana A_n adalah polinomial Adomian yang didefinisikan sebagai

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0},$$

e-ISSN: 2580-3239
p-ISSN: 2085-7993
Volume 22 No. 2 November 2023

dimana λ adalah parameter dan $n = 0,1,2, \dots$. Polinom Adomian A_n dapat diuraikan menjadi

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0} N\left(\sum_{k=0}^{0} \lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0} = N(y_0),$$
$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d^1}{d\lambda^1} N\left(\sum_{k=0}^{1} \lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0} = y_1 N'(y_0),$$
$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} N\left(\sum_{k=0}^{2} \lambda^k y_k\right)\right]_{\lambda=0}$$
$$= y_2 N'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} N''(y_0),$$
$$\vdots$$

Substitusikan persamaan **Error! Reference source not found.** dan **Error! Reference source not found.** ke persamaan **Error! Reference source not found.**, sehingga diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = y(0) + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[P]\right] + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}\left[Q \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)\right]\right] + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}\left[R \sum_{n=0}^{\infty} A_n\right]\right],$$

$$y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \dots =$$
$$= y(0) + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[P]\right] + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[Q(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots)]\right] + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[R(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots)]\right]. \tag{3.9}$$

Dari persamaan **Error! Reference source not found.**, diperoleh iterasi rekursif sebagai berikut

$$y_0(t) = y(0) + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[P]\right],$$
$$y_1(t) = \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[Q y_0]\right] + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[R A_0]\right],$$
$$y_2(t) = \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[Q y_1]\right] + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[R A_1]\right],$$
$$y_n(t) = \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[Q y_{n-1}]\right] + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[R A_{n-1}]\right].$$

Jadi secara umum, solusi dari masalah PDF Riccati (3.3) menggunakan Metode Dekomposisi Kamal adalah

$$y_0(t) = y(0) + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[P]\right],$$
$$y_n(t) = \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[Q y_{n-1}]\right] + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[R A_{n-1}]\right], \tag{3.10}$$

dengan $n \geq 1$.

3.3 *Mean Absolute Error* (MAE)

Mean Absolute Error (MAE) merupakan metode untuk mengukur akurasi dengan menghitung rata-rata dari selisih absolut antara data aktual dan data prediksi (Hyndman dan Athanasopoulos, 2012). MAE didefinisikan sebagai berikut

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} |Y_k - F_k|,$$

dimana
Y_t : data aktual pada waktu ke-k
F_t : data prediksi pada waktu ke-k
n : banyaknya data.

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan dua contoh masalah PDF Riccati sebagai berikut

4.1 Contoh 1

Diberikan PDF Riccati berorde α sebagai berikut (Johansyah *et al*., 2022)

$$D_t^\alpha y(t) = -y(t) + y^2(t), \tag{4.1}$$

dimana $0 \leq t \leq 1,\ 0 < \alpha \leq 1, P = 0, Q = -1, R = 1$, syarat nilai awal $y(0) = \frac{1}{2}$, dan solusi eksak

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}}. \tag{4.2}$$

a. Penyelesaian Menggunakan Metode Variasi Parameter (VPM)

Solusi hampiran masalah PDF Riccati (4.1) menggunakan VPM adalah

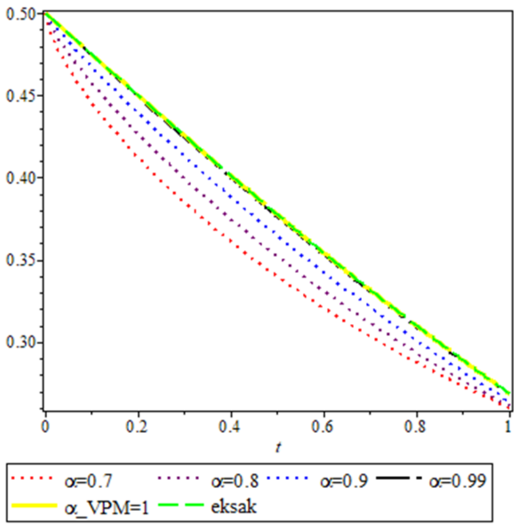
$$y_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(-y_n(\tau) + y_n^2(\tau)\right)d\tau, \tag{4.3}$$

dimana $n = 0, 1, 2, \dots$ dan $0 < \alpha \leq 1$. Kemudian, dengan menggunakan Teorema 2.3 dan fungsi Gamma diperoleh solusi hampiran

PDF Riccati untuk nilai $\alpha = 1$ dan $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sebagai berikut

$$y_0(t) = \frac{1}{2},$$
$$y_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t = 0{,}5 - 0{,}25t,$$
$$y_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{48}t^3 = 0{,}5 - 0{,}25t + 0{,}02083333333t^3,$$
$$y_3(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{(16)(4)}t^3 - \frac{1}{(96)(6)}t^5 + \frac{1}{(48^2)(7)}t^7 = 0{,}5 - 0{,}25t + 0{,}02083333333t^3 - 0{,}002083333333t^5 + 0{,}00006200396825t^7,$$
$$\vdots$$

Kemudian, disajikan grafik solusi eksak (4.2) dan solusi hampiran (4.3) iterasi kelima menggunakan VPM dengan $\alpha = 0{,}7$; $0{,}8$; $0{,}9$; $0{,}99$; 1 di $0 \le t \le 1$ dari masalah (4.1). Perhatikan bahwa, saat $\alpha = 1$, grafik solusi hampiran yang diperoleh berhimpit dengan solusi eksaknya.



Sumber: Olahan Peneliti (2023)

Gambar 1. Grafik Solusi Eksak dan Solusi Hampiran Iterasi Kelima dari PDF Riccati Bentuk Pertama Menggunakan VPM

b. Penyelesaian Menggunakan Metode Dekomposisi Kamal

Berdasarkan subbab 3.2, solusi hampiran PDF Riccati (4.1) menggunakan Metode Dekomposisi Kamal adalah

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \cdots, \qquad (4.4)$$

dimana

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y(0) + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[P]\right], \\ &= \frac{1}{2} + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[0]\right], \\ y_n(t) &= \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[Qy_{n-1}]\right] + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[RA_{n-1}]\right] \\ &= -\mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[y_{n-1}]\right] + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[A_{n-1}]\right], n \ge 1, \end{aligned} \qquad (4.5)$$

dan A_n adalah polinomial Adomian dari operator tak linear $Ny(t) = y^2(t)$, yang dapat diuraikan sebagai berikut

$$A_0 = N(y_0) = y_0^2,$$
$$A_1 = y_1 N'(y_0) = 2y_0 y_1,$$
$$A_2 = y_2 N'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} N''(y_0) = 2y_0 y_2 + y_1^2,$$
$$\vdots$$

Kemudian, dengan menguraikan persamaan (4.5) untuk $n = 0, 1, 2, 3$, diperoleh

$$y_0(t) = \frac{1}{2},$$
$$y_1(t) = -\frac{1}{4}\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$
$$y_2(t) = 0,$$
$$y_3(t) = \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{16\,\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha},$$
$$\vdots$$

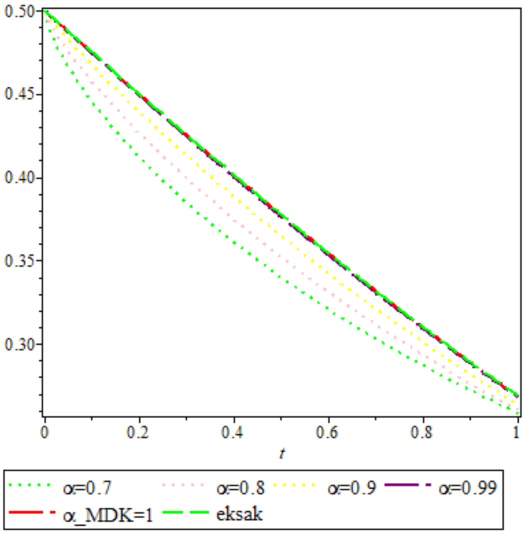
Jadi, solusi hampiran dari masalah (4.1) menggunakan Metode Dekomposisi Kamal adalah

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{16\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} t^{3\alpha} + \cdots,$$

sehingga, solusi hampiran untuk $\alpha = 1$ adalah sebagai berikut

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{t}{\Gamma(2)} + \frac{\Gamma(3)}{16\,\Gamma^2(2)\Gamma(4)}t^3$$
$$= 0{,}5 - 0{,}25t + 0{,}02083333333t^3 + \cdots.$$

Kemudian, berikut disajikan grafik solusi eksak (4.2) dan solusi hampiran (4.4) iterasi kelima menggunakan Metode Dekomposisi Kamal dengan $\alpha = 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9; 0{,}99; 1$ di $0 \leq t \leq 1$ dari masalah (4.1).



Sumber: Olahan Peneliti (2023)

Gambar 2. Grafik Solusi Eksak dan Solusi Hampiran Iterasi Kelima dari PDF Riccati Bentuk Pertama Menggunakan Metode Dekomposisi Kamal

Dari Gambar 1 dan Gambar 2 dapat dilihat bahwa ketika $\alpha = 1$, grafik solusi hampiran dari VPM dan Metode Dekomposisi Kamal berhimpit dengan solusi eksaknya. Hal ini menunjukkan bahwa solusi hampiran dari kedua metode tersebut menuju solusi yang sama yaitu solusi eksaknya, sehingga sesuai dengan Teorema 2.8 yang menyatakan bahwa PDF Riccati tak linear dengan koefisien konstan dan syarat nilai awal mempunyai solusi yang tunggal.

Selanjutnya, dilakukan perhitungan nilai MAE dengan bantuan Maple 18 dari solusi eksak dan solusi hampiran iterasi kelima dengan $\alpha = 1$ di $t = 0; 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8; 0{,}9; 1$. Misalkan Y_k adalah nilai solusi eksak ke-k, F_{VPM_k} adalah nilai solusi hampiran VPM ke-k, dan F_{MDK_k} adalah nilai solusi hampiran Metode Dekomposisi Kamal ke-k, diperoleh:

a. Nilai MAE dari solusi hampiran menggunakan VPM adalah

$$MAE_{VPM1} = \frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}\left|Y_k - F_{VPM_k}\right|$$
$$= 3{,}97 \cdot 10^{-8}.$$

b. Nilai MAE dari solusi hampiran menggunakan Metode Dekomposisi Kamal adalah

$$MAE_{MDK1} = \frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}\left|Y_k - F_{VPM_k}\right|$$
$$= 3{,}18 \cdot 10^{-5}.$$

Dari perhitungan di atas, diperoleh bahwa solusi hampiran iterasi kelima dari PDF Riccati (4.1) menggunakan VPM lebih akurat dibandingkan dengan Metode Dekomposisi Kamal.

4.2 Contoh 2

Diberikan PDF Riccati berorde α sebagai berikut (Johansyah *et al.*, 2022)

$$D_t^{\alpha} y(t) = 1 + y^2(t) \tag{4.6}$$

dengan $0 \leq t \leq 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $P = 1$, $Q = 0$, $R = 1$, syarat nilai awal $y(0) = 0$, dan solusi eksak

$$y(t) = \tan(x). \tag{4.7}$$

a. Penyelesaian Menggunakan Metode Variasi Parameter (VPM)

Solusi hampiran masalah PDF Riccati (4.6) menggunakan VPM adalah

$$y_{n+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(1 + y_n^2(\tau)\right)d\tau \tag{4.8}$$

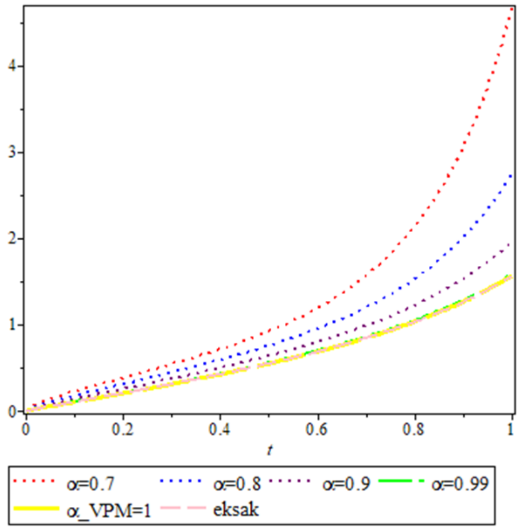
dimana $n = 0, 1, 2, \ldots$ dan $0 < \alpha \leq 1$. Kemudian, dengan menggunakan Teorema 2.3 dan fungsi Gamma diperoleh solusi hampiran

e-ISSN: 2580-3239
p-ISSN: 2085-7993
Volume 22 No. 2 November 2023

PDF Riccati untuk nilai $\alpha = 1$ dan $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= 0,\\
y_1(t) &= t,\\
y_2(t) &= t + \frac{1}{3}t^3\\
&= t + 0{,}3333333333t^3,\\
y_3(t) &= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7\\
&= t + 0{,}3333333333t^3\\
&\quad + 0{,}6666666667t^5\\
&\quad + 0{,}01587301587t^7,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Kemudian, disajikan grafik solusi eksak (4.7) dan solusi hampiran (4.8) iterasi kelima menggunakan VPM dengan $\alpha = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}99;\ 1$ di $0 \le t \le 1$ dari masalah (4.6). Perhatikan bahwa, saat $\alpha = 1$, grafik solusi hampiran yang diperoleh berhimpit dengan solusi eksaknya.



Sumber: Olahan Peneliti (2023)

Gambar 3. Grafik Solusi Eksak dan Solusi Hampiran PDF Riccati (4.6) Menggunakan VPM

b. Penyelesaian Menggunakan Metode Dekomposisi Kamal

Berdasaarkan subbab 3.2, solusi hampiran PDF Riccati (4.6) menggunakan Metode Dekomposisi Kamal adalah

$$
y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \cdots, \tag{4.9}
$$

dimana

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= y(0) + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[P]\right]\\
&= \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[1]\right],\\
y_n(t) &= \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[Qy_{n-1}]\right]\\
&\quad + \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[RA_{n-1}]\right]\\
&= \mathcal{K}^{-1}\left[v^\alpha \mathcal{K}[A_{n-1}]\right], n \ge 1,
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

dan A_n adalah polinomial Adomian dari operator tak linear $Ny(t) = y^2(t)$, yang dapat diuraikan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
A_0 &= N(y_0) = y_0^2,\\
A_1 &= y_1 N'(y_0) = 2y_0y_1,\\
A_2 &= y_2N'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!}N''(y_0) = 2y_0y_2 + y_1^2,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Kemudian, dengan menguraikan persamaan (4.10) untuk $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},\\
y_1(t) &= \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha},\\
y_2(t) &= \frac{2\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma^3(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)}t^{5\alpha},\\
y_3(t) &\\
&= \left(\frac{4\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma^4(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)\Gamma(7\alpha+1)}\right.\\
&\quad \left. + \frac{\Gamma^2(2\alpha+1)\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma^4(\alpha+1)\Gamma^2(3\alpha+1)\Gamma(7\alpha+1)}\right)t^{7\alpha},\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Jadi, solusi hampiran dari masalah (4.6) menggunakan Metode Dekomposisi Kamal adalah

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \cdots\\
&= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)}t^{3\alpha}\\
&\quad + \frac{2\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)}{\Gamma^3(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)}t^{5\alpha}
\end{aligned}
$$

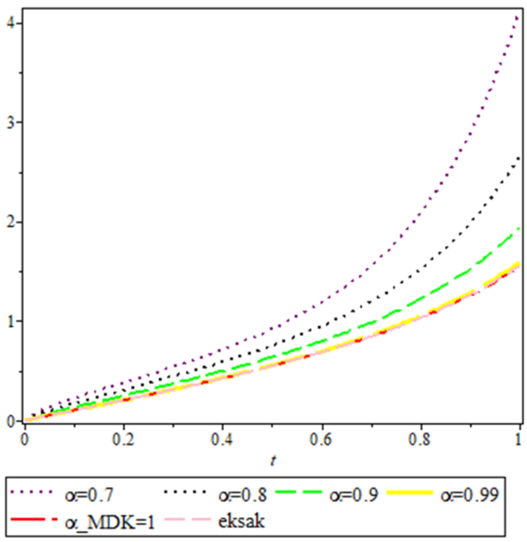
e-ISSN: 2580-3239
p-ISSN: 2085-7993
Volume 22 No. 2 November 2023

$$+\left(\frac{4\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma^4(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)\Gamma(7\alpha+1)}+\frac{\Gamma^2(2\alpha+1)\Gamma(6\alpha+1)}{\Gamma^4(\alpha+1)\Gamma^2(3\alpha+1)\Gamma(7\alpha+1)}\right)t^{7\alpha}+\cdots,$$

sehingga, solusi hampiran untuk $\alpha = 1$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{t}{\Gamma(2)}+\frac{\Gamma(3)}{\Gamma^2(2)\Gamma(4)}t^3 + \frac{2\Gamma(3)\Gamma(5)}{\Gamma^3(2)3\Gamma(4)\Gamma(6)}t^5 + \left(\frac{4\Gamma(3)\Gamma(5)\Gamma(7)}{\Gamma^4(2)\Gamma(4)\Gamma(6)\Gamma(8)}+\frac{\Gamma^2(3)\Gamma(7)}{\Gamma^4(2)\Gamma^2(4)\Gamma(8)}\right)t^7+\cdots \\ &= t + 0{,}3333333333t^3 + 0{,}1333333333t^5 + 0{,}05396825397t^7 + \cdots. \end{aligned}$$

Kemudian, berikut disajikan grafik solusi eksak (4.7) dan solusi hampiran (4.9) iterasi kelima menggunakan Metode Dekomposisi Kamal dengan $\alpha = 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 0{,}99;\ 1$ di $0 \leq t \leq 1$ dari masalah (4.6).



Sumber: Olahan Peneliti (2023)

Gambar 4. Grafik Solusi Eksak dan Solusi Hampiran Iterasi Kelima dari PDF Riccati Bentuk Pertama Menggunakan Metode Dekomposisi Kamal.

Dari Gambar 3 dan Gambar 4 dapat dilihat bahwa ketika $\alpha = 1$, grafik solusi hampiran dari VPM dan Metode Dekomposisi Kamal berhimpit dengan solusi eksaknya. Hal ini menunjukkan bahwa solusi hampiran dari kedua metode tersebut menuju solusi yang sama yaitu solusi eksaknya, sehingga sesuai dengan Teorema 2.8 yang menyatakan bahwa PDF Riccati tak linear dengan koefisien konstan dan syarat nilai awal mempunyai solusi yang tunggal.

Selanjutnya, dilakukan perhitungan nilai MAE dengan bantuan Maple 18 dari solusi eksak dan solusi hampiran iterasi kelima $\alpha = 1$ di $t = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 1$. Misalkan Y_k adalah nilai solusi eksak ke-k, F_{VPM_k} adalah nilai solusi hampiran VPM ke-k, dan F_{MDK_k} adalah nilai solusi hampiran Metode Dekomposisi Kamal ke-k, diperoleh:

a. Nilai MAE untuk solusi hampiran menggunakan VPM adalah
$$MAE_{VPM2} = \frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}\left|Y_k - F_{VPM_k}\right| = 5{,}51 \cdot 10^{-4}.$$
b. Nilai MAE untuk solusi hampiran menggunakan Metode Dekomposisi Kamal adalah
$$MAE_{MDK2} = \frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}\left|Y_k - F_{VPM_k}\right| = 7{,}01 \cdot 10^{-4}.$$
Dari perhitungan di atas, diperoleh bahwa solusi hampiran iterasi kelima dari PDF Riccati (4.6) menggunakan VPM lebih akurat dibandingkan dengan Metode Dekomposisi Kamal.

5 SIMPULAN

Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa solusi hampiran dari masalah PDF Riccati dengan koefisien kosntan dapat diperoleh menggunakan VPM dan Metode Dekomposisi Kamal. Kemudian, analisis solusi dari kedua masalah PDF Riccati yang diberikan pada penelitian ini adalah:

a. Solusi hampiran iterasi kelima PDF Riccati bentuk pertama menggunakan VPM lebih akurat dibandingkan Metode Dekomposisi

e-ISSN: 2580-3239
p-ISSN: 2085-7993
Volume 22 No. 2 November 2023

Kamal dengan nilai MAE berturut-turut adalah $3{,}97 \cdot 10^{-8}$ dan $3{,}18 \cdot 10^{-5}$.

b. Solusi hampiran iterasi kelima PDF Riccati bentuk kedua menggunakan VPM lebih akurat dibandingkan Metode Dekomposisi Kamal dengan nilai MAE berturut-turut adalah $5{,}51 \cdot 10^{-4}$ dan $7{,}01 \cdot 10^{-4}$.

DAFTAR PUSTAKA

Anjum, N., & He, J. H. (2019). Laplace transform: Making the variational iteration method easier. *Applied Mathematics Letters, 92*, 134–138. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.01.016

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2008). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems 9th Edition*. John Wiley & Sons.

Haq, E. U. H., Ali, M., & Khan, A. S. (2020). On the solution of fractional Riccati differential equations with variation of parameters method. *Engineering and Applied Science Letters*, *3*(3), 1–9. https://doi.org/10.30538/psrp-easl2020.0041

Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2012). *Forecasting: principles and practice*. OTexts.

Jafari, H., & Tajadodi, H. (2010). He's variational iteration method for solving fractional Riccati differential equation. *International Journal of Differential Equations*, *2010*. https://doi.org/10.1155/2010/764738

Johansyah, M. D., Napitupulu, H., Harahap, E., Sumiati, I., & Supriatna, A. K. (2019). *Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan Adomian Decomposition Method dan Variational Iteration Method*. *18*(1). http://ejournal.unisba.ac.id

Johansyah, M. D., Supriatna, A. K., Rusyaman, E., & Saputra, J. (2022a). Solving Differential Equations of Fractional Order Using Combined Adomian Decomposition Method with Kamal Integral Transformation. *Mathematics and Statistics*, *10*(1), 187–194. https://doi.org/10.13189/ms.2022.100117

Johansyah, M. D., Supriatna, A. K., Rusyaman, E., & Saputra, J. (2022b). The Existence and Uniqueness of Riccati Fractional Differential Equation Solution and Its Approximation Applied to an Economic Growth Model. *Mathematics*, *10*(17). https://doi.org/10.3390/math10173029

Kimeu, J. M. (2009). *Fractional Calculus: Definitions and Applications* [Western Kentucky University]. http://digitalcommons.wku.edu/theseshttp://digitalcommons.wku.edu/theses/115

Li, C., Qian, D., & Chen, Y. (2011). On Riemann-Liouville and Caputo derivatives. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, *2011*. https://doi.org/10.1155/2011/562494

Momani, S., & Shawagfeh, N. (2006). Decomposition method for solving fractional Riccati differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, *182*(2), 1083–1092. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.05.008

Ross, S. L. (1984). *Differential Equations 3rd Edition*. John Willey & Sons.

Sedeeg, A. K. H. (2016). The New Integral Transform "'Kamal Transform.'" *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, *11*(4), 451–458. http://www.ripublication.com

Tan, Y., & Abbasbandy, S. (2008). Homotopy analysis method for quadratic Riccati differential equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *13*(3), 539–546. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.06.006