

Analisis Model Persamaan Diferensial Fraksional dari Penyebaran Penyakit Campak dan Solusi Numerik Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian *Laplace*

Wildan Rachman Gumelar, Endang Rusyaman, Nursanti Anggriani

Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Padjadjaran

Email: wildan18002@mail.unpad.ac.id; rusyaman@unpad.ac.id; nursanti.anggriani@unpad.ac.id.

Abstrak

Persamaan diferensial fraksional adalah persamaan diferensial dengan orde fraksional yang dapat diterapkan ke dalam berbagai bidang seperti aliran fluida, viskoelastisitas, viskositas, ekonomi, keuangan, dan model penyebaran penyakit. Campak adalah penyakit yang disebabkan oleh infeksi virus. Penyakit ini sering menyerang anak-anak dan tergolong penyakit yang sangat menular. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh model persamaan diferensial fraksional *Susceptible Vaccinated Exposed Infected Quarantined Recovered* (SVEIQR) dari penyebaran penyakit campak, mendapatkan hasil analisis, solusi numerik, serta simulasi numerik dari model tersebut. Metode dekomposisi Adomian *Laplace* digunakan untuk memperoleh solusi numerik dari model persamaan diferensial fraksional SVEIQR penyebaran penyakit campak. Hasil dari penelitian ini adalah diperolehnya model persamaan diferensial fraksional SVEIQR dari penyebaran penyakit campak, pembuktian eksistensi dan ketunggalan solusi, memperoleh titik ekuilibrium, rasio reproduksi dasar, analisis kestabilan titik ekuilibrium non-endemik, memperoleh solusi numerik, dan simulasi numerik. Berdasarkan grafik yang diperoleh dari simulasi numerik didapat bahwa semakin mendekatnya orde turunan fraksional q ke 1 maka solusi dengan orde fraksional akan mendekati ke solusi dengan orde 1.

Kata Kunci: Persamaan diferensial fraksional, model penyebaran penyakit, campak, metode dekomposisi Adomian *Laplace*.

Abstract

Fractional differential equation is a differential equation with fractional order that can be applied to various fields such as fluid flow, viscoelasticity, viscosity, economics, finance, and disease spread model. Measles is a disease caused by a virus infection. This disease often affects children and classified as a highly contagious disease. This study aims to obtain a Susceptible Vaccinated Exposed Infected Quarantined Recovered (SVEIQR) fractional differential equation model for the spread of measles, obtain analysis results, numerical solution, and numerical simulation from this model. The Laplace Adomian decomposition method was used to obtain a numerical solution of the SVEIQR fractional model for the spread of measles. The results of this study are obtained the SVEIQR fractional model for the spread of measles, proved the existence and uniqueness of solution, obtained equilibrium point, basic reproduction number, stability analysis of non-endemic equilibrium point, obtained numerical solution, and numerical simulation. Based on the graph that obtained from numerical simulation, it is found that the closer the order of the fractional derivative q is to 1 than the solution of the fractional order will be closer to the solution with order 1.

Keywords: Fractional differential equation, disease spread model, measles, Laplace Adomian decomposition method.

1 PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Pada umumnya, turunan dari suatu fungsi memiliki orde bilangan asli. Kalkulus fraksional membahas mengenai integral dan turunan dengan orde fraksional. Persamaan diferensial yang mengandung turunan fraksional disebut persamaan diferensial fraksional (Podlubny, 1999). Kalkulus fraksional menjadi sangat populer dan dapat diterapkan di berbagai bidang seperti aliran fluida, viskoelastisitas, viskositas (Rusyaman *et al.*, 2022), ekonomi (Johansyah *et al.*, 2022), keuangan (Fall *et al.*, 2019), dan model penyebaran penyakit (Indah *et al.*, 2022). Salah satu penyakit yang dipelajari model penyebaran penyakitnya yaitu penyakit campak.

Penyakit campak merupakan penyakit infeksi virus akut serius yang sangat menular. Campak disebabkan oleh *Paramyxovirus* dan ditularkan terutama melalui udara (*airborne*) (Alam & Iriani, 2021). Penyakit ini dapat menyerang siapa saja tanpa mengenal jenis kelamin maupun usia. Namun, penyakit ini lebih banyak menyerang anak-anak dari pada orang dewasa. Penyakit campak yang juga dikenal sebagai morbilli atau *measles* ini memiliki gejala berupa demam tinggi, bercak kemerahan pada kulit disertai dengan batuk, pilek, dan mata merah (konjungtivitis). Untuk mencegah penyakit campak, semua institusi kesehatan menganjurkan anak-anak untuk mendapatkan vaksin campak. Selain mendapatkan vaksin campak, karantina juga dapat dilakukan untuk mencegah penyakit campak (Aldila & Asrianti, 2019).

Telah banyak penelitian yang membahas mengenai model matematika fraksional penyebaran penyakit campak. Nazir *et al.* (2020) membahas model penyebaran penyakit campak SVEIR dengan turunan Caputo-Fabrizio dan penyelesaian numerik

menggunakan metode dekomposisi Adomian *Laplace*. Aguegboh *et al.* (2020) membahas model penyebaran penyakit campak SEIR dengan turunan Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan metode Adams Bashforth. Kumar *et al.* (2021) membahas model penyebaran penyakit campak SEIR dengan turunan Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan metode polinomial Genocchi serta metode Adams-Bashforth-Moulton.

Pada artikel ini akan dibahas mengenai penerapan persamaan diferensial fraksional pada model SEIR penyebaran penyakit campak dengan turunan Caputo. Model SEIR akan dimodifikasi dan ditambahkan asumsi-asumsi sehingga diperoleh model *Susceptible Vaccinated Exposed Infected Quarantined Recovered* (SVEIQR). Metode dekomposisi Adomian *Laplace* digunakan untuk mencari solusi numeriknya. Metode tersebut merupakan kombinasi dari metode dekomposisi Adomian dengan transformasi *Laplace* yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear maupun non-linear.

2 KAJIAN PUSTAKA

Definisi 2.1 Podlubny (1999) Turunan fraksional Riemann-Liouville didefinisikan sebagai

$$D_{t_0}^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-q-1} f(\tau) d\tau$$

dengan q orde sebarang, $n-1 < q < 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$, t_0 batas bawah, $t_0 < t$, $t > 0$, dan D^q operator turunan fraksional berorde q .

Pada turunan fraksional Riemann-Liouville didapat bahwa turunan fraksional dari konstanta akan bernilai tidak sama dengan nol. Pada tahun 1967 Caputo membuat turunan fraksional tipe Caputo sebagai cara lain untuk menghitung turunan fraksional.

Definisi 2.2 Podlubny (1999) Misalkan q bilangan real, dan $n-1 < q < n$, dimana n adalah bilangan asli, turunan fraksional tipe

Caputo dengan orde q dari $f(t)$ terhadap t didefinisikan dengan

$$D^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{-n+q+1}} ds.$$

Definisi 2.3 Podlubny (1999) Misalkan q bilangan real, dan $n - 1 < q < n$, dimana n adalah bilangan asli, integral fraksional tipe Caputo dengan orde q dari $f(t)$ terhadap t didefinisikan dengan

$$I^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s) ds.$$

Definisi 2.4 Podlubny (1999) Transformasi Laplace dari operator turunan fraksional Caputo dengan orde q adalah sebagai berikut:

$$\mathcal{L}[D^q y(t)](s) = s^q \mathcal{L}[y(t)] - \sum_{l=0}^{m-1} s^{q-l-1} g^{(l)}(0),$$

$$m - 1 < q \leq m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

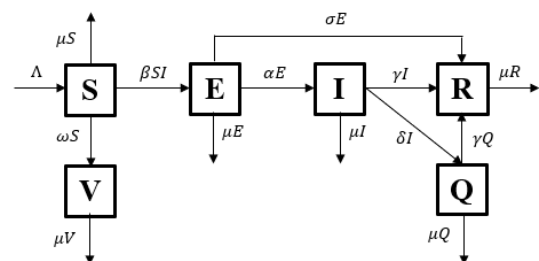
3 METODE PENELITIAN

Pada pebelitian ini dilakukan modifikasi pada model SEIR dan menambahkan asumsi-asumsi sehingga diperoleh model *Susceptible Vaccinated Exposed Infected Quarantined Recovered* (SVEIQR) lalu menerapkan persamaan diferensial fraksional pada model dan menganalisis serta mencari solusi numeriknya menggunakan Metode dekomposisi Adomian Laplace yang merupakan kombinasi dari metode dekomposisi Adomian dengan transformasi Laplace. Adapun asumsi-asumsi yang digunakan pada model SVEIQR penyebaran penyakit campak adalah sebagai berikut:

1. Faktor kelahiran alami dalam populasi yaitu pada kompartemen *Susceptible* (S) diasumsikan konstan sebesar Λ ,
2. Populasi yang divaksin (V) adalah populasi rentan (S) yang telah mendapatkan vaksin dengan laju vaksinasi sebesar ω dan diasumsikan hanya satu kali dilakukan vaksinasi,
3. Individu rentan dapat terjangkit virus campak apabila melakukan interaksi dengan individu terinfeksi dengan laju interaksi sebesar β ,

4. Karena pada penyakit campak memiliki periode laten, maka individu pada kompartemen *Exposed* (E) akan berpindah ke kompartemen *Infected* (I) dengan laju sebesar α ,
5. Dilakukannya terapi campak setelah pemeriksaan serologis atau virologis pada populasi terjangkit (E) sehingga akan sembuh dan berpindah menjadi populasi yang sembuh (R) dengan laju sebesar σ ,
6. Individu yang terinfeksi (I) dapat sembuh dengan laju sebesar γ ,
7. Individu pada kompartemen *Infected* (I) akan berpindah ke kompartemen *Quarantined* (Q) dengan melakukan karantina dimana lajunya yaitu sebesar δ . Populasi yang melakukan karantina (Q) diasumsikan melakukan karantina sampai sembuh, tidak terjadi interaksi dengan populasi rentan (S), dan tidak mendapatkan pengobatan khusus yang berbeda dengan populasi terinfeksi (I) sehingga laju kesembuhannya sebesar γ ,
8. Individu yang telah divaksin akan mendapatkan kekebalan permanen sehingga tidak akan terinfeksi,
9. Adanya faktor kematian alami untuk setiap kompartemen dan memiliki laju kematian yang sama yaitu μ ,
10. Individu yang telah sembuh dari penyakit campak tidak akan terinfeksi kembali.

Berdasarkan asumsi di atas, dibentuk diagram skematik sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram skematik model SVEIQR penyakit campak.

Berdasarkan diagram skematik di atas, maka dapat dibentuk model sistem dinamik berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta SI - (\omega + \mu)S \\ \frac{dV}{dt} &= \omega S - \mu V \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\sigma + \mu + \alpha)E \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - (\gamma + \mu + \delta)I \\ \frac{dQ}{dt} &= \delta I - (\mu + \gamma)Q \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \gamma Q + \sigma E - \mu R. \end{aligned} \tag{1}$$

Keterangan untuk variabel dan parameter sistem (1) disediakan dalam Tabel 1 dan Tabel 2.

Tabel 1. Keterangan kompartemen pada sistem (1).

Kompartemen	Keterangan	Nilai awal	Sumber
S	Populasi individu yang rentan terhadap penyakit	600	Farman <i>et al.</i> (2018)
V	Populasi individu yang mendapat vaksin	0	Asumsi
E	Populasi individu yang terinfeksi penyakit namun belum dapat menularkannya	250	Farman <i>et al.</i> (2018)
I	Populasi individu yang terinfeksi	100	Farman <i>et al.</i> (2018)
Q	Populasi individu yang melakukan karantina	0	Asumsi

Kompartemen	Keterangan	Nilai awal	Sumber
R	Populasi individu yang sembuh dari penyakit	50	Farman <i>et al.</i> (2018)

Tabel 2. Keterangan parameter pada sistem (1).

Parameter	Keterangan	Nilai	Sumber
Λ	Laju kelahiran alami	0,32	Farman <i>et al.</i> (2018)
ω	Laju vaksinasi	0,6	Asumsi
β	Laju interaksi antara populasi rentan dan terinfeksi	0,001	Asumsi
α	Laju transmisi dari E ke I	0,01	Farman <i>et al.</i> (2018)
σ	Laju terapi campak	0,25	Farman <i>et al.</i> (2018)
γ	Laju kesembuhan	0,2	Farman <i>et al.</i> (2018)
δ	Laju karantina	0,5	Aldila & Asrianti (2019)
μ	Laju kematian alami	0,2	Farman <i>et al.</i> (2018)

dimana $S(t) + V(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) = N(t)$ dan kondisi awal $S(0) = S_0, V(0) = V_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0, Q(0) = Q_0, R(0) = R_0$.

4 HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan disajikan analisis dari model persamaan diferensial fraksional

Caputo penyebaran penyakit campak dan penghitungan solusi numerik serta simulasi numeriknya.

4.1 Model Persamaan Diferensial Fraksional Caputo Penyebaran Penyakit Campak

Model persamaan diferensial fraksional penyebaran penyakit campak untuk $t > 0$ dan $0 < q \leq 1$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} D^q S(t) &= \Lambda - \beta SI - (\omega + \mu)S \\ D^q V(t) &= \omega S - \mu V \\ D^q E(t) &= \beta SI - (\sigma + \mu + \alpha)E \\ D^q I(t) &= \alpha E - (\gamma + \mu + \delta)I \\ D^q Q(t) &= \delta I - (\mu + \gamma)Q \\ D^q R(t) &= \gamma I + \gamma Q + \sigma E - \mu R \end{aligned} \tag{2}$$

dengan kondisi awal non-negatif dimana $S(t_0) = S_0, V(t_0) = V_0, E(t_0) = E_0, I(t_0) = I_0, Q(t_0) = Q_0, R(t_0) = R_0$.

4.2 Eksistensi dan Ketunggalan Solusi

Akan ditunjukkan bahwa sistem memiliki solusi yang tunggal menggunakan teorema titik tetap Banach.

Sistem dapat ditulis menjadi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} D^q S(t) &= k_1(t, S(t)), \\ D^q V(t) &= k_2(t, V(t)), \\ D^q E(t) &= k_3(t, E(t)), \\ D^q I(t) &= k_4(t, I(t)), \\ D^q Q(t) &= k_5(t, Q(t)), \\ D^q R(t) &= k_6(t, R(t)). \end{aligned}$$

Solusi sistem persamaan diferensial fraksional dapat diperoleh dengan menggunakan integral Volterra. Sistem tersebut dapat ditulis menjadi sebagai berikut:

$$S(t) - S(0) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - \xi)^{q-1} k_1(\xi, S) d\xi, \tag{3}$$

$$V(t) - V(0) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - \xi)^{q-1} k_2(\xi, V) d\xi, \tag{4}$$

$$E(t) - E(0) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - \xi)^{q-1} k_3(\xi, E) d\xi, \tag{5}$$

$$I(t) - I(0) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - \xi)^{q-1} k_4(\xi, I) d\xi, \tag{6}$$

$$Q(t) - Q(0) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - \xi)^{q-1} k_5(\xi, Q) d\xi, \tag{7}$$

$$R(t) - R(0) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t - \xi)^{q-1} k_6(\xi, R) d\xi. \tag{8}$$

Asumsikan bahwa S, V, E, I, Q, R merupakan fungsi terbatas. Misalkan $\|S(t)\| \leq \rho_1, \|V(t)\| \leq \rho_2, \|E(t)\| \leq \rho_3, \|I(t)\| \leq \rho_4, \|Q(t)\| \leq \rho_5, \|R(t)\| \leq \rho_6$, dimana $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$ suatu konstanta positif. Akan dibuktikan bahwa masing-masing kernel $k_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ memenuhi kondisi *Lipschitz* dan juga kontraksi.

Kernel k_1 memenuhi kondisi *Lipschitz* dan juga kontraksi jika memenuhi pertidaksamaan berikut:

$$\begin{aligned} \|k_1(t, S) - k_1(t, S_1)\| &= \|-\beta(S(t) - S_1(t))I(t) \\ &\quad - (\omega + \mu)(S(t) - S_1(t))\| \\ &\leq (\beta \rho_4 + \omega + \mu) \|S(t) - S_1(t)\|. \end{aligned}$$

Misalkan $c_1 = (\beta \rho_4 + \omega + \mu)$ maka

$$\|k_1(t, S) - k_1(t, S_1)\| \leq c_1 \|S(t) - S_1(t)\|. \tag{9}$$

Jadi, k_1 memenuhi kondisi *Lipschitz* dan karena $0 < (\beta \rho_4 + \omega + \mu) < 1$ maka k_1 adalah kontraksi.

Dengan cara yang sama, diperoleh kondisi *Lipschitz* untuk $k_i, i = 2, 3, 4, 5, 6$ sebagai berikut

$$\|k_2(t, V) - k_2(t, V_1)\| \leq c_2 \|V(t) - V_1(t)\|. \tag{10}$$

$$\|k_3(t, E) - k_3(t, E_1)\| \leq c_3 \|E(t) - E_1(t)\|. \tag{11}$$

$$\|k_4(t, I) - k_4(t, I_1)\| \leq c_4 \|I(t) - I_1(t)\|. \tag{12}$$

$$\|k_5(t, Q) - k_5(t, Q_1)\| \leq c_5 \|Q(t) - Q_1(t)\|. \tag{13}$$

$$\|k_6(t, R) - k_6(t, R_1)\| \leq c_6 \|R(t) - R_1(t)\|. \tag{14}$$

dimana $c_2 = \mu, c_3 = (\sigma + \mu + \alpha), c_4 = (\gamma + \mu + \delta), c_5 = (\mu + \gamma), c_6 = \mu$, dan karena $0 < c_i < 1, i = 2, 3, 4, 5, 6$ maka $k_i, i = 2, 3, 4, 5, 6$ adalah kontraksi.

Berdasarkan persamaan (3) hingga (8) dibentuk formula rekursif sebagai berikut:

$$G_{1n}(t) = S_n(t) - S_{n-1}(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\xi)^{q-1} (k_1(\xi, S_{n-1}) - k_1(\xi, S_{n-2})) d\xi, \quad (15)$$

$$G_{2n}(t) = V_n(t) - V_{n-1}(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\xi)^{q-1} (k_2(\xi, V_{n-1}) - k_2(\xi, V_{n-2})) d\xi, \quad (16)$$

$$G_{3n}(t) = E_n(t) - E_{n-1}(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\xi)^{q-1} (k_3(\xi, E_{n-1}) - k_3(\xi, E_{n-2})) d\xi, \quad (17)$$

$$G_{4n}(t) = I_n(t) - I_{n-1}(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\xi)^{q-1} (k_4(\xi, I_{n-1}) - k_4(\xi, I_{n-2})) d\xi, \quad (18)$$

$$G_{5n}(t) = Q_n(t) - Q_{n-1}(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\xi)^{q-1} (k_5(\xi, Q_{n-1}) - k_5(\xi, Q_{n-2})) d\xi, \quad (19)$$

$$G_{6n}(t) = R_n(t) - R_{n-1}(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\xi)^{q-1} (k_6(\xi, R_{n-1}) - k_6(\xi, R_{n-2})) d\xi, \quad (20)$$

dengan kondisi awal $S_0(t) = S(0)$, $V_0(t) = V(0)$, $E_0(t) = E(0)$, $I_0(t) = I(0)$, $Q_0(t) = Q(0)$, $R_0(t) = R(0)$.

Dapat ditulis

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^n G_{1i}(t),$$

$$V_n(t) = \sum_{i=1}^n G_{2i}(t),$$

$$E_n(t) = \sum_{i=1}^n G_{3i}(t),$$

$$I_n(t) = \sum_{i=1}^n G_{4i}(t),$$

$$Q_n(t) = \sum_{i=1}^n G_{5i}(t),$$

$$R_n(t) = \sum_{i=1}^n G_{6i}(t).$$

Untuk persamaan (15) maka

$$\begin{aligned} \|G_{1n}(t)\| &= \|S_n(t) - S_{n-1}(t)\| \\ &= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\xi)^{q-1} (k_1(\xi, S_{n-1}) - k_1(\xi, S_{n-2})) d\xi \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \|(t-\xi)^{q-1} (k_1(\xi, S_{n-1}) - k_1(\xi, S_{n-2}))\| d\xi. \end{aligned}$$

Dengan kondisi Lipschitz diperoleh

$$\|G_{1n}(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(q)} c_1 \int_0^t \|G_{1(n-1)}(\xi)\| d\xi. \quad (21)$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\|G_{in}(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(q)} c_i \int_0^t \|G_{i(n-1)}(\xi)\| d\xi, \quad i = 2,3,4,5,6. \quad (22)$$

Solusi dari model persamaan diferensial fraksional SVEIQR penyebaran penyakit campak ada jika terdapat $t_1 > 0$ sedemikian sehingga

$$\frac{1}{\Gamma(q)} c_i t_1 < 1,$$

untuk $i = 1,2,3,4,5,6$.

Bukti.

Berdasarkan persamaan (21) dan (22) secara rekursif didapat bahwa

$$\|G_{1n}(t)\| \leq \|S(0)\| \left(\frac{1}{\Gamma(q)} c_1 t\right)^n,$$

$$\|G_{2n}(t)\| \leq \|V(0)\| \left(\frac{1}{\Gamma(q)} c_2 t\right)^n,$$

$$\|G_{3n}(t)\| \leq \|E(0)\| \left(\frac{1}{\Gamma(q)} c_3 t\right)^n,$$

$$\|G_{4n}(t)\| \leq \|I(0)\| \left(\frac{1}{\Gamma(q)} c_4 t\right)^n,$$

$$\|G_{5n}(t)\| \leq \|Q(0)\| \left(\frac{1}{\Gamma(q)} c_5 t\right)^n,$$

$$\|G_{6n}(t)\| \leq \|R(0)\| \left(\frac{1}{\Gamma(q)} c_6 t\right)^n.$$

Jadi, model memiliki solusi. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa fungsi $S_n(t)$, $V_n(t)$, $E_n(t)$, $I_n(t)$, $Q_n(t)$, $R_n(t)$ konvergen ke solusi persamaan (3) hingga (8). Didefinisikan $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}, C_{5n}, C_{6n}$ sebagai suku yang tersisa setelah iterasi ke- n .

$$S(t) - S(0) = S_n(t) - C_{1n}(t),$$

$$V(t) - V(0) = V_n(t) - C_{2n}(t),$$

$$E(t) - E(0) = E_n(t) - C_{3n}(t),$$

$$I(t) - I(0) = I_n(t) - C_{4n}(t),$$

$$Q(t) - Q(0) = Q_n(t) - C_{5n}(t),$$

$$R(t) - R(0) = R_n(t) - C_{6n}(t).$$

$$\begin{aligned} \|C_{1n}(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (k_1(\xi, S) - k_1(\xi, S_{n-1})) d\xi \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} c_1 \|S - S_{n-1}\| t. \end{aligned}$$

Dengan metode perulangan diperoleh

$$\|C_{1n}(t)\| \leq \left(\frac{1}{\Gamma(q)} c_1 t\right)^{n+1} \rho_1.$$

Untuk t_1 didapat

$$\|C_{1n}(t)\| \leq \left(\frac{1}{\Gamma(q)} c_1 t_1\right)^{n+1} \rho_1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_{1n}(t)\| = 0.$$

Dengan cara yang sama, diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_{in}(t)\| = 0, i = 2,3,4,5,6.$

Selanjutnya akan dibuktikan ketunggalan solusi dari model persamaan diferensial fraksional SVEIQR penyebaran penyakit campak .

Selain $S(t), V(t), E(t), I(t), Q(t), R(t)$, misalkan sistem memiliki solusi lain yaitu $S_1(t), V_1(t), E_1(t), I_1(t), Q_1(t), R_1(t)$.

$$S(t) - S_1(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (k_1(\xi, S) - k_1(\xi, S_1)) d\xi$$

$$\begin{aligned} \|S(t) - S_1(t)\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (k_1(\xi, S) - k_1(\xi, S_1)) d\xi \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \|k_1(\xi, S) - k_1(\xi, S_1)\| d\xi. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kondisi *Lipschitz* diperoleh

$$\|S(t) - S_1(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(q)} c_1 t \|S(t) - S_1(t)\|$$

$$\|S(t) - S_1(t)\| - \frac{1}{\Gamma(q)} c_1 t \|S(t) - S_1(t)\| \leq 0$$

$$\|S(t) - S_1(t)\| \left(1 - \frac{1}{\Gamma(q)} c_1 t\right) \leq 0.$$

Karena $\|S(t) - S_1(t)\| \geq 0$ dan diasumsikan $\frac{1}{\Gamma(q)} c_1 t < 1$ sehingga diperoleh $S(t) = S_1(t)$, maka tidak ada solusi lain yang terpenuhi.

Dengan cara yang sama, akan diperoleh hasil yang sama untuk $V(t), E(t), I(t), Q(t), R(t)$.

4.3 Sifat Invarian Positif Pada Himpunan Ω

$$\Omega = \left\{ (S, V, E, I, Q, R) \in \mathbb{R}_0^+ : S + V + E + I + Q + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

$$\begin{aligned} N(t) &= N(0)E_q(-\mu t^q) + \int_0^t \Lambda \theta^{q-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \mu^i \theta^{iq}}{\Gamma(iq + q)} d\theta \\ &= \frac{\Lambda}{\mu} + E_q(-\mu t^q) \left(N(0) - \frac{\Lambda}{\mu} \right) \\ &\leq \frac{\Lambda}{\mu}. \end{aligned}$$

Jadi, jika $N(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, maka untuk $t > 0$,

$$N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Himpunan Ω adalah invarian positif terhadap model yang artinya semua penyelesaian berada di dalam Ω .

4.4 Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium dari model dapat diperoleh dengan mengasumsikan $D^q S(t) = D^q V(t) = D^q E(t) = D^q I(t) = D^q Q(t) = D^q R(t) = 0$ dan mencari solusi penyelesaiannya. Untuk mencari titik ekuilibrium non-endemik, nilai banyaknya individu terinfeksi $I = I^0 = 0$ sedangkan untuk mencari titik ekuilibrium endemik, $I \neq 0$. Diperoleh titik ekuilibrium non-endemik dari model yaitu $E_0 = (S^0, V^0, E^0, I^0, Q^0, R^0)$
 $= \left(\frac{\Lambda}{\omega + \mu}, \frac{\Lambda \omega}{\mu(\omega + \mu)}, 0, 0, 0, 0 \right).$

Dan titik ekuilibrium endemik dari model yaitu $E^* = (S^*, V^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ dimana $S^* = \frac{xy}{\alpha\beta}, V^* = \frac{\omega xy}{\alpha\beta\mu}, E^* = \frac{\Lambda\alpha\beta - vxy}{\alpha\beta x},$

$$I^* = \frac{\Lambda\alpha\beta - vxy}{\beta xy}, \quad Q^* = \frac{\delta(\Lambda\alpha\beta - vxy)}{\beta xyz},$$

$$R^* = \frac{(\alpha\gamma z + \alpha\delta\gamma + \sigma yz)(\Lambda\alpha\beta - vxy)}{\alpha\beta\mu xyz}.$$

4.5 Rasio Reproduksi Dasar

Rasio reproduksi dasar dari model dicari dengan menggunakan *next generation method* diperoleh

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\Lambda\alpha\beta}{(\omega + \mu)(\sigma + \mu + \alpha)(\gamma + \mu + \delta)}.$$

4.6 Analisis Kestabilan

Dengan menyubstitusikan titik ekuilibrium non-endemik ke dalam matriks Jacobian kemudian mencari nilai eigennya diperoleh bahwa titik ekuilibrium non-endemik akan stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0 < 1$.

4.7 Solusi Numerik

Solusi numerik akan dicari dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian *Laplace*. Misalkan kondisi awal $S(0) = n_1, V(0) = n_2, E(0) = n_3, I(0) = n_4, Q(0) = n_5, R(0) = n_6$. Dengan menerapkan transformasi *Laplace* di kedua ruas pada sistem persamaan (2) diperoleh

$$\mathcal{L}[D^q S(t)] = \Lambda\mathcal{L}[1] - \beta\mathcal{L}[S(t)I(t)] - (\omega + \mu)\mathcal{L}[S(t)], \quad (23)$$

$$\mathcal{L}[D^q V(t)] = \omega\mathcal{L}[S(t)] - \mu\mathcal{L}[V(t)], \quad (24)$$

$$\mathcal{L}[D^q E(t)] = \beta\mathcal{L}[S(t)I(t)] - (\sigma + \mu + \alpha)\mathcal{L}[E(t)], \quad (25)$$

$$\mathcal{L}[D^q I(t)] = \alpha\mathcal{L}[E(t)] - (\gamma + \mu + \delta)\mathcal{L}[I(t)], \quad (26)$$

$$\mathcal{L}[D^q Q(t)] = \delta\mathcal{L}[I(t)] - (\mu + \gamma)\mathcal{L}[Q(t)], \quad (27)$$

$$\mathcal{L}[D^q R(t)] = \gamma\mathcal{L}[I(t)] + \gamma\mathcal{L}[Q(t)] + \sigma\mathcal{L}[E(t)] - \mu\mathcal{L}[R(t)]. \quad (28)$$

Dengan menggunakan transformasi *Laplace* dari operator turunan fraksional Caputo didapat

$$\mathcal{L}[S(t)] = \frac{n_1}{s} + \frac{\Lambda}{s^{q+1}} - \frac{\beta}{s^q}\mathcal{L}[S(t)I(t)] - \frac{(\omega + \mu)}{s^q}\mathcal{L}[S(t)], \quad (29)$$

$$\mathcal{L}[V(t)] = \frac{n_2}{s} + \frac{\omega}{s^q}\mathcal{L}[S(t)] - \frac{\mu}{s^q}\mathcal{L}[V(t)], \quad (30)$$

$$\mathcal{L}[E(t)] = \frac{n_3}{s} + \frac{\beta}{s^q}\mathcal{L}[S(t)I(t)] - \frac{(\sigma + \mu + \alpha)}{s^q}\mathcal{L}[E(t)], \quad (31)$$

$$\mathcal{L}[I(t)] = \frac{n_4}{s} + \frac{\alpha}{s^q}\mathcal{L}[E(t)] - \frac{(\gamma + \mu + \delta)}{s^q}\mathcal{L}[I(t)], \quad (32)$$

$$\mathcal{L}[Q(t)] = \frac{n_5}{s} + \frac{\delta}{s^q}\mathcal{L}[I(t)] - \frac{(\mu + \gamma)}{s^q}\mathcal{L}[Q(t)], \quad (33)$$

$$\mathcal{L}[R(t)] = \frac{n_6}{s} + \frac{\gamma}{s^q}\mathcal{L}[I(t)] + \frac{\gamma}{s^q}\mathcal{L}[Q(t)] + \frac{\sigma}{s^q}\mathcal{L}[E(t)] - \frac{\mu}{s^q}\mathcal{L}[R(t)]. \quad (34)$$

Asumsikan bahwa solusi merupakan deret tak hingga

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t), V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t), E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(t),$$

$$I(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(t), Q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t), R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(t).$$

Bentuk non-linear $S(t)I(t)$ dapat ditulis menjadi

$$S(t)I(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(S, I)$$

dimana $A_k(S, I)$ adalah polinom Adomian yaitu

$$A_k(S, I) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left[\sum_{j=0}^k \lambda^j S_j(t) \sum_{j=0}^k \lambda^j I_j(t) \right]_{\lambda=0},$$

Dengan menerapkan invers transformasi *Laplace* diperoleh relasi rekursif dari solusi sebagai berikut

$$S_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{n_1}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\Lambda}{s^{q+1}} \right], \quad (35)$$

$$S_n(t) = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\beta}{s^q} \mathcal{L}[A_{n-1}(S, I)] \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(\omega + \mu)}{s^q} \mathcal{L}[S_{n-1}(t)] \right], \quad (36)$$

$$V_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{n_2}{s} \right], \quad (37)$$

$$V_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{s^q} \mathcal{L}[S_{n-1}(t)] \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mu}{s^q} \mathcal{L}[V_{n-1}(t)] \right], \quad (38)$$

$$E_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{n_3}{s} \right], \tag{39}$$

$$E_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\beta}{s^q} \mathcal{L}[A_{n-1}(S, I)] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(\sigma + \mu + \alpha)}{s^q} \mathcal{L}[E_{n-1}(t)] \right] \right], \tag{40}$$

$$I_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{n_4}{s} \right], \tag{41}$$

$$I_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\alpha}{s^q} \mathcal{L}[E_{n-1}(t)] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(\gamma + \mu + \delta)}{s^q} \mathcal{L}[I_{n-1}(t)] \right] \right], \tag{42}$$

$$Q_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{n_5}{s} \right], \tag{43}$$

$$Q_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\delta}{s^q} \mathcal{L}[I_{n-1}(t)] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(\mu + \gamma)}{s^q} \mathcal{L}[Q_{n-1}(t)] \right] \right], \tag{44}$$

$$R_0(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{n_6}{s} \right], \tag{45}$$

$$R_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\gamma}{s^q} \mathcal{L}[I_{n-1}(t)] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\gamma}{s^q} \mathcal{L}[Q_{n-1}(t)] \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sigma}{s^q} \mathcal{L}[E_{n-1}(t)] \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\mu}{s^q} \mathcal{L}[R_{n-1}(t)] \right] \right], \tag{46}$$

untuk $n = 1, 2, 3, \dots$

Solusi dari model persamaan diferensial fraksional SVEIQR penyebaran penyakit campak dapat ditulis sebagai

$$S_0(t) = 600 + \frac{0,32 t^q}{\Gamma(q+1)}, V_0(t) = 0, E_0(t) = 250,$$

$$I_0(t) = 100, Q_0(t) = 0, R_0(t) = 50,$$

$$S_1(t) = -\frac{540 t^q}{\Gamma(q+1)} - \frac{0,288 t^{2q}}{\Gamma(2q+1)},$$

$$V_1(t) = \frac{360 t^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{0,192 t^{2q}}{\Gamma(2q+1)},$$

$$E_1(t) = -\frac{55 t^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{0,032 t^{2q}}{\Gamma(2q+1)},$$

$$I_1(t) = -\frac{87,5 t^q}{\Gamma(q+1)}, Q_1(t) = \frac{50 t^q}{\Gamma(q+1)}, R_1(t) = \frac{72,5 t^q}{\Gamma(q+1)},$$

$$S_2(t) = \frac{538,5 t^{2q}}{\Gamma(2q+1)} + \frac{0,028 \Gamma(2q+1) t^{3q}}{\Gamma(q+1)^2 \Gamma(3q+1)} + \frac{0,2592 t^{3q}}{\Gamma(3q+1)},$$

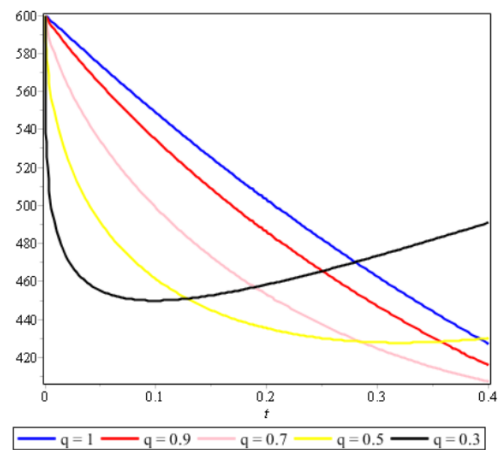
$$V_2(t) = -\frac{396 t^{2q}}{\Gamma(2q+1)} - \frac{0,2112 t^{3q}}{\Gamma(3q+1)},$$

$$E_2(t) = -\frac{81,2 t^{2q}}{\Gamma(2q+1)} - \frac{0,028 \Gamma(2q+1) t^{3q}}{\Gamma(q+1)^2 \Gamma(3q+1)} - \frac{0,04352 t^{3q}}{\Gamma(3q+1)},$$

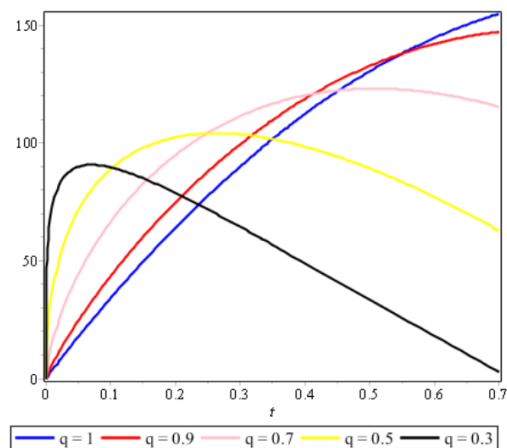
$$I_2(t) = \frac{78,2 t^{2q}}{\Gamma(2q+1)} + \frac{0,00032 t^{3q}}{\Gamma(3q+1)},$$

$$Q_2(t) = -\frac{63,75 t^{2q}}{\Gamma(2q+1)}, R_2(t) = -\frac{35,75 t^{2q}}{\Gamma(2q+1)} + \frac{0,008 t^{3q}}{\Gamma(3q+1)}.$$

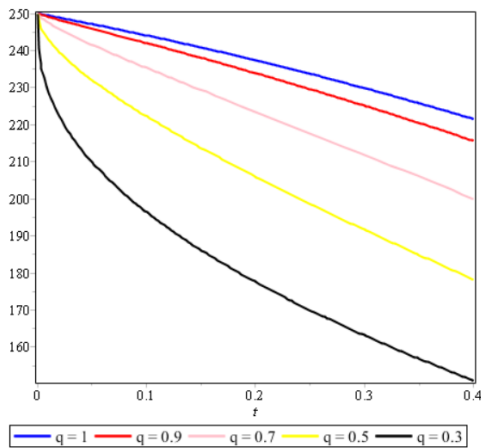
Dengan menggunakan *software* Maple 2018 diperoleh hasil grafik dari solusi penyelesaian menggunakan metode dekomposisi Adomian *Laplace* dengan orde q yang berbeda sebagai berikut:



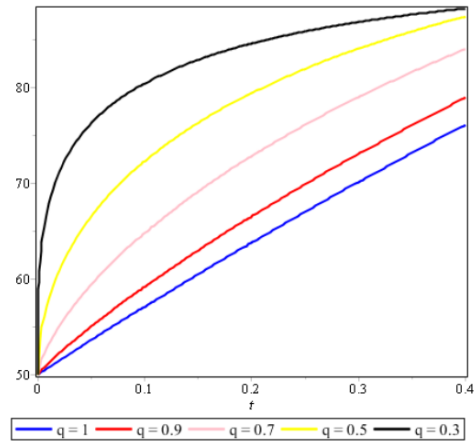
Gambar 2. Grafik kompartemen S.



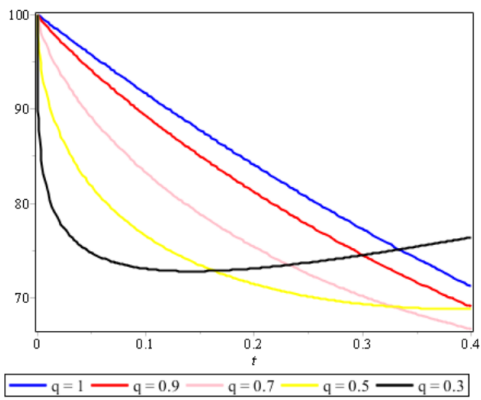
Gambar 3. Grafik kompartemen V.



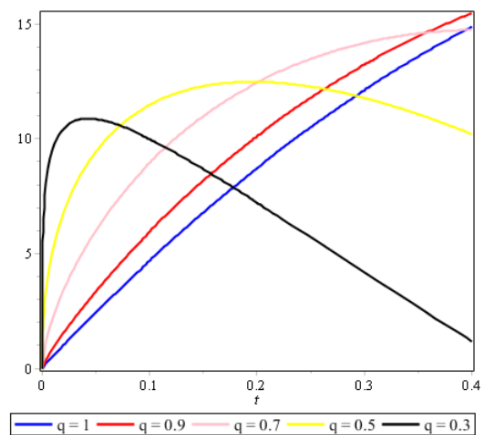
Gambar 4. Grafik kompartemen E.



Gambar 7. Grafik kompartemen R.



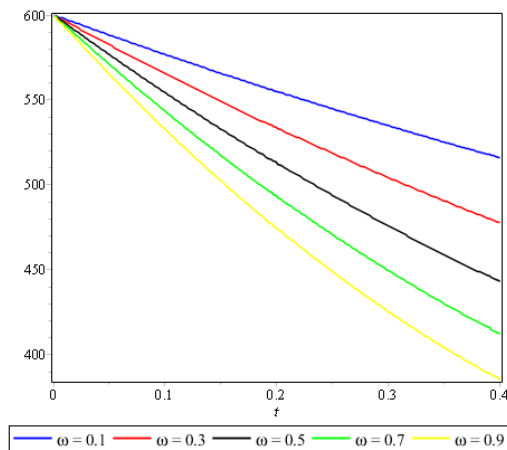
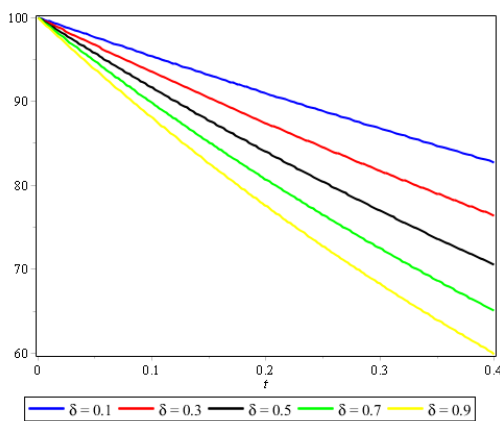
Gambar 5. Grafik kompartemen I.



Gambar 6. Grafik kompartemen Q.

Gambar 2 hingga Gambar 7 menunjukkan simulasi numerik dari model persamaan diferensial fraksional SVEIQR penyebaran penyakit campak pada setiap kompartemen dengan orde fraksional yang berbeda. Berdasarkan grafik tersebut dapat diketahui bahwa semakin meningkatnya nilai dari orde turunan fraksional q , solusi dengan orde fraksional akan mendekati ke solusi dengan orde $q = 1$. Grafik yang dihasilkan lebih fleksibel karena untuk orde fraksional yang berbeda akan menghasilkan grafik yang berbeda. Pada gambar tersebut dapat terlihat bahwa semakin besar orde fraksional q maka semakin besar kecekungan grafik dari solusinya. Model persamaan diferensial fraksional menunjukkan adanya efek memori dimana semakin kecil orde fraksional q maka semakin cepat terjadinya perubahan banyaknya individu baik meningkat ataupun menurun.

Selanjutnya akan dilihat bagaimana pengaruh nilai parameter ω terhadap individu rentan dan nilai parameter δ terhadap individu terinfeksi. Dengan menggunakan *software* Maple 2018 diperoleh hasil grafik sebagai berikut:

Gambar 8. Grafik perbedaan nilai ω .Gambar 9. Grafik perbedaan nilai δ .

Pada Gambar 8 dan Gambar 9 dapat terlihat bahwa besarnya nilai laju vaksinasi ω berpengaruh pada individu rentan. Semakin besar nilai ω maka individu rentan semakin cepat menurun. Dan besarnya nilai laju karantina δ berpengaruh pada individu dalam kompartemen terinfeksi. Semakin besar nilai δ maka individu terinfeksi semakin cepat menurun.

5 SIMPULAN

Model persamaan diferensial fraksional SVEIQR dari penyebaran penyakit campak telah diperoleh dengan memodifikasi model SEIR dan menambahkan asumsi-asumsi. Analisis model persamaan diferensial fraksional SVEIQR dari penyebaran penyakit campak telah dilakukan yaitu membuktikan

eksistensi dan ketunggalan solusi, memperoleh titik ekuilibrium non-endemik, titik ekuilibrium endemik, rasio reproduksi dasar, dan analisis kestabilan titik ekuilibrium non-endemik.

Solusi numerik model persamaan diferensial fraksional SVEIQR dari penyebaran penyakit campak diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace. Simulasi numerik telah dilakukan dan didapat bahwa semakin meningkatnya nilai dari orde turunan fraksional q , solusi dengan orde fraksional akan mendekati ke solusi dengan orde 1 serta grafik yang dihasilkan lebih fleksibel sehingga peneliti dapat memilih orde turunan fraksional q . Semakin besar orde fraksional q maka semakin kecil kecekungan grafik dari solusinya. Model persamaan diferensial fraksional menunjukkan adanya efek memori dimana semakin kecil orde fraksional q maka semakin cepat terjadinya perubahan banyaknya individu baik meningkat ataupun menurun. Besarnya nilai laju vaksinasi ω berpengaruh pada individu rentan. Semakin besar nilai ω maka individu rentan semakin cepat menurun. Besarnya nilai laju karantina δ berpengaruh pada individu dalam kompartemen terinfeksi. Semakin besar nilai δ maka individu terinfeksi semakin cepat menurun.

DAFTAR PUSTAKA

- Aguegbah, N.S. (2020). A Fractional Order Model for the Transmission Dynamics of Measles with Vaccination. *Open Access Library Journal*. 7(10), 1.
- Alam, A. & Iriani, Y. (2019). *Apakah Infeksi Campak?* Tersedia di: <https://www.idai.or.id/artikel/seputar-kesehatan-anak/apakah-infeksi-campak> (Diakses: 2 November 2021).
- Aldila, D. & Asrianti, D. (2019). A deterministic model of measles with imperfect vaccination and quarantine intervention. *Journal of Physics:*

- Conference Series, IOP Publishing.* 012044.
- Fall, A.N., Ndiaye, S.N., & Sene, N. (2019). Black–Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative, *Chaos, Solitons & Fractals.* 125, 108–118.
- Farman, M. *et al.* (2018). Analysis and numerical solution of SEIR epidemic model of measles with non-integer time fractional derivatives by using Laplace Adomian Decomposition Method. *Ain Shams Engineering Journal.* 9(4), 3391–3397.
- Indah, M., Rusyaman, E., & Anggriani, N. (2022). Fractional mathematical modeling analysis for COVID-19 spread. *AIP Conference Proceedings, AIP Publishing LLC.* 020005.
- Johansyah, M.D. *et al.* (2022). Modelling of natural growth with memory effect in economics: An application of adomian decomposition and variational iteration methods. *Decision Science Letters.* 11(1), 73–80.
- Kumar, S. *et al.* (2021). A wavelet based numerical scheme for fractional order SEIR epidemic of measles by using Genocchi polynomials, *Numerical Methods for Partial Differential Equations.* 37(2), 1250–1268.
- Nazir, G. *et al.* (2020). Fractional dynamical analysis of measles spread model under vaccination corresponding to nonsingular fractional order derivative. *Advances in Difference Equations.* 2020(1), 1–15.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations.* ACADEMIC PRESS. London.
- Rusyaman, E. *et al.* (2022). Viscosity Analysis of Lubricating Oil Through the Solution of Exponential Fractional Differential Equations. *Mathematics and Statistics.* 10, 134–139.